

Đề Tham Khảo Cao Học

Môn Giải tích

Đề số 1 - Thời gian 180 phút

Bài 1. (2 điểm) (i) Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x).$$

(ii) Tìm giá trị của a sao cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau là liên tục trên \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{nếu } x \leq a, \\ x^2, & \text{nếu } x > a. \end{cases}$$

Bài 2 (2 điểm) (i) Tìm độ dài của đường cong cho bởi đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, với $1 \leq x \leq 2$.

(ii) Tìm giá trị của C sao cho tích phân sau $\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx$ hội tụ. Tìm giá trị của tích phân với giá trị C đó.

Bài 3 (3 điểm) (i) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ trên miền $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

(ii) Chứng minh rằng hàm số sau không liên tục tại $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(iii) Tính tích phân $\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2, y^2\}} dy dx$.

Bài 4 (3 điểm) Cho $C([0, 1])$ là không gian các hàm liên tục $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Trên $C([0, 1])$, ta định nghĩa

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|, \quad \text{với mọi } f \in C([0, 1]).$$

(i) Chứng minh rằng $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ là không gian Banach.

(ii) Trên không gian $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, toán tử $A : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ được định nghĩa như sau

$$Af(t) := \int_0^1 e^s f(s) ds, \quad t \in [0, 1], f \in C([0, 1]).$$

Chứng minh rằng A là toán tử tuyến tính liên tục và tìm $\|A\|$.