

# Đề Tham Khảo Cao Học

## Môn Giải tích

Đề số 2 - Thời gian 180 phút

**Bài 1.** (2 điểm) (i) Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right).$$

(ii) Tìm giá trị của  $a$  và  $b$  sao cho

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \frac{5}{12}.$$

**Bài 2** (2 điểm) (i) Tìm độ dài của đường cong cho bởi đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{3}\sqrt{x(x-3)} - \frac{1}{2}\ln x$ , với  $1 \leq x \leq 9$ .

(ii) Tìm giá trị của  $C$  sao cho tích phân sau  $\int_0^\infty \left( \frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx$  hội tụ. Tìm giá trị của tích phân với giá trị  $C$  đó.

**Bài 3** (2 điểm) (i) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$  trên miền  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ .

(ii) Chứng minh rằng hàm số sau liên tục tại  $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Bài 4** (3 điểm) Cho  $C([0, 1])$  là không gian các hàm liên tục  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Trên  $C([0, 1])$ , ta định nghĩa

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|, \quad \text{với mọi } f \in C([0, 1]).$$

(i) Chứng minh rằng  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  là không gian Banach.

(ii) Tồn tại hay không một tích vô hướng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  trên  $C([0, 1])$  thỏa mãn

$$\|f\|_\infty = \langle f, f \rangle \quad \text{với mọi } f \in C([0, 1]),$$

**Bài 5** (1 điểm) Cho  $(X, d)$  là một không gian metric đủ. Chứng minh mọi ánh xạ co từ  $X$  và chính nó đều có duy nhất một điểm bất động.