HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

ĐỀ THAM KHẢO
Môn thi: Đại số

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Xét hệ phương trình tuyến tính sau, trong đó x, y, z là các ẩn số thực, k là tham số:

$$\begin{cases} (k+2)x + 2ky - z = 1, \\ x - 2y + kz = -k, \\ y + z = k. \end{cases}$$

(a) Hãy giải hệ phương trình trên khi $k = -1$.
(b) Biện luận theo k số nghiệm của hệ phương trình trên.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận A với tham số thực a: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của A. Chứng minh rằng nếu $a = \frac{1}{2}$ thì ma trận A không chéo hóa được.
(b) Khi $a = 0$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Bài 3. (*2 điểm*) Ta nói hai ma trận vuông cấp 2, với hệ số phức A, B là phản giao hoán nếu $AB = -BA$.

(a) Chứng minh rằng các ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

đôi một phản giao hoán với nhau.
(b) Giả sử các ma trận khả nghịch A, B là phản giao hoán với nhau. Giả sử λ là một giá trị riêng của A. Chứng minh rằng $-\lambda$ cũng là một giá trị riêng của A.
c) Chứng minh rằng không tồn tại 4 ma trận cấp hai, với hệ số phức, khả nghịch, đôi một khác nhau sao cho hai ma trận bất kỳ trong chúng là phản giao hoán với nhau.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho G là một nhóm hữu hạn có cấp không chia hết cho 3. Giả sử rằng với mọi phần tử a, b của G đều thoả mãn $(ab)^3 = a^3b^3$. Chứng minh rằng G là nhóm giao hoán.

Bài 5. (*2 điểm*) Tìm tất cả các đa thức bất khả quy bậc hai trên trường có ba phần tử F_3.

Không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.