

A N N - PHẠM TRÙ KHÁ CHẶT CHẼ

NGUYỄN TIẾN QUANG

Abstract. An Ann-category is called strict enough if its natural equivalences, except a natural equivalence for commutativity, are identities. The purpose of this paper is to prove that every Ann-category is Ann-equivalent to an enough strict Ann-category.

Kể từ công trình của MacLane S. [5] các định lý khớp luôn đóng vai trò trung tâm trong các nghiên cứu về phạm trù monoidal. Bài toán xét cấu trúc của chúng xuất hiện muộn hơn trong loạt công trình của Hoàng Xuân Sính [1], Mitchell B. [6], Ulbrich K. H. [12], Nguyễn Tiến Quang [9]. Trong hai bài toán này việc đưa mỗi phạm trù đã cho về một phạm trù tương đương với nó, nhưng có hệ các ràng buộc đơn giản hơn, có một ý nghĩa lớn. Do có một số (có thể là tất cả) các ràng buộc đã trở thành phép đồng nhất nên mức độ phức tạp trong nhiều vấn đề được giảm đi khá nhiều. Điều này đã được thể hiện rõ trong nhiều chứng minh định lý khớp của các tác giả khác nhau (xem [2, 3, 4, 8, 10]).

Một Ann-phạm trù được cho bởi 9 đẳng cấu tự nhiên (còn gọi là các ràng buộc) của tính kết hợp, đơn vị, giao hoán và phân phối đối với hai phép toán $\oplus, \otimes$

$$\underline{A} = (\underline{A}, a^+, c, (0, g, d), a, (I, l, r), \mathcal{L}, \mathcal{R}).$$

Các đẳng cấu này thỏa mãn các tiên đề của một Ann-phạm trù tương tự như hệ tiên đề của vành (xem [7, 9]). Kết quả chính của bài này khẳng định rằng mỗi Ann-phạm trù như thế đều Ann-tương đương với một Ann-phạm trù *khá chặt chẽ* theo nghĩa tất cả mọi đẳng cấu tự nhiên, trừ đẳng cấu giao hoán c và một đẳng cấu phân phối (trái hoặc phải), đều là phép đồng nhất. Đây là kết quả mạnh hơn so với định lý nhúng đã được dùng trong chứng minh định lý khớp ([8, 9]).

Các khái niệm và kết quả về Ann-phạm trù có thể xem [7, 9]. Hơn nữa, để cho gọn đôi khi ta ký hiệu AB thay cho $A \otimes B$.

1. XÂY DỰNG ANN-PHẠM TRÙ KHÁ CHẶT CHẼ

Trước hết giả thiết rằng $\underline{A}$ là một Ann-phạm trù AU -chặt chẽ đối với phép cộng $\oplus$ (tức là các đẳng cấu kết hợp, đơn vị của phép cộng đều là đồng nhất) do mỗi Ann-phạm trù đều Ann-tương đương với một Ann-phạm trù kiểu như vậy (mệnh đề II. 1.5[9]).

Định nghĩa 1. Một M -hàm tử $(F, \check{F}, \check{F}) : \underline{A} \rightarrow \underline{A}$ gồm AC -hàm tử $(F, \check{F})$ đối với phép cộng $\oplus$ và đẳng cấu $\check{F}$

$$\check{F}_{X,Y} : F(X \otimes Y) \rightarrow (FX) \otimes Y$$

thỏa mãn các biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} F(A(BC)) & \xrightarrow{\check{F}} & FA(BC) \\ \downarrow F(a) & & \downarrow a \\ F((AB)C) & \xrightarrow{\check{F}} F(AB)C \xrightarrow{\check{F} \otimes id} & ((FA)B)C \end{array} \quad (1)$$

và thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) họ $(\check{F}_{X,Y})_Y$ là $\oplus$ -mũi tên từ $F.L^X$ đến L^{FX} ,
 - (ii) họ $(\check{F}_{X,Y})_X$ là $\oplus$ -mũi tên từ $F.R^Y$ đến $L^Y.F$,
- trong đó

$$\begin{aligned} L^A &= A \otimes -, & \check{L}_{X,Y}^A &= \mathcal{L}_{A,X,Y} \\ R^A &= - \otimes A, & \check{R}_{X,Y}^A &= \mathcal{R}_{X,Y,A} \end{aligned}$$

Một mũi M -mũi tên từ $(F, \check{F}, \check{F})$ đến $(G, \check{G}, \check{G})$ là một $\oplus$ -mũi tên $\varphi : F \rightarrow G$ thỏa mãn biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} F(XY) & \xrightarrow{\check{K}} & (FX)Y \\ \varphi_{XY} \downarrow & & \downarrow \varphi_X \otimes id_Y \\ G(XY) & \xrightarrow{\check{G}} & (GX)Y \end{array} \quad (2)$$

Ví dụ : Hàm tử $(L^A, \check{L}^A)$, $A \in \underline{A}$ là một M -hàm tử với $\check{L}_{X,Y}^A = a_{A,X,Y}$. Mỗi mũi tên $u : A \rightarrow B$ xác định một M -mũi tên $\varphi : (L^A, \check{L}^A, \check{L}^A) \rightarrow (L^B, \check{L}^B, \check{L}^B)$ cho bởi hệ thức $\varphi_X = u \otimes id_X$.

Từ đây về sau ta sẽ ký hiệu $M(\underline{A})$ là phạm trù tất cả các M -hàm tử của Ann-phạm trù $\underline{A}$ và tất cả các M -mũi tên.

Có thể thử lại tính đúng đắn của các mệnh đề sau

Mệnh đề 2. $M(\underline{A})$ là $\oplus$ -phạm trù với phép toán $\oplus$ được xác định bởi hệ thức $(F, \check{F}, \check{\check{F}}) \oplus (G, \check{G}, \check{\check{G}}) = (F + G, F \check{+} G, F \check{\check{+}} G)$, trong đó

$$(F + G)X = FX \oplus GX,$$

$$(F \check{+} G)_{X,Y} = v.(\check{F}_{X,Y} \oplus \check{G}_{X,Y}),$$

$$(F \check{\check{+}} G)_{X,Y} = \mathcal{R}_{FX, GX, Y}^{-1}(\check{F}_{X,Y} \oplus \check{G}_{X,Y}),$$

$$(\varphi \oplus \psi)_X = \varphi_X \oplus \psi_X$$

Mệnh đề 3. $M(\underline{A})$ là một Pic-phạm trù AU -chặt chẽ, trong đó

(i) Vật không $0^* = (\theta, \check{\theta}, \check{\check{\theta}})$ được cho bởi các hệ thức

$$\theta(X) = 0, \theta(f) = id_0, \check{\theta}_{X,Y} = id_0, \check{\check{\theta}}_{X,Y} = (\hat{R}^Y)^{-1},$$

(ii) Dạng cấu giao hoán c^* được cho bởi hệ thức

$$c_{F,G}^*(X) = c_{FX, GX}$$

Mệnh đề 4. $M(\underline{A})$ là $\otimes$ - phạm trù với phép toán $\otimes$ xác định bởi các hệ thức

$$F \otimes G = F.G \quad (\text{phép hợp thành})$$

$$(F \check{\otimes} G)_{X,Y} = \check{F}_{GX, GY}.F(\check{G}_{X,Y})$$

$$(F \check{\check{\otimes}} G)_{X,Y} = \check{F}_{GX, Y}.F(\check{G}_{X,Y})$$

$$\varphi \otimes \psi = \varphi * \psi$$

Mệnh đề 5. Đối với phép toán $\otimes$ phạm trù $M(\underline{A})$ là AU - chặt chẽ, trong đó vật đơn vị là hàm tử đồng nhất của $\underline{A}$, $I^* = id_{\underline{A}}$.

Mệnh đề 6. $M(\underline{A})$ là Ann-phạm trù khá chặt chẽ với các đẳng cấu phân phối được cho bởi các hệ thức

$$\mathcal{L}_{F,G,H}^*(X) = \check{F}_{GX, HX}, \mathcal{R}^* = id.$$

2. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 7. *Mỗi Ann-phạm trù đều Ann-tương đương với một Ann-phạm trù khá chặt chẽ.*

C h ứ n g m i n h. Trước hết, hoàn toàn có thể giả thiết rằng Ann-phạm trù $\underline{A}$ là AU -chặt chẽ đối với phép cộng $\oplus$. Bây giờ ta chứng minh $\underline{A}$ Ann-tương đương với Ann-phạm trù khá chặt chẽ $M(\underline{A})$. Xét hàm tử $\Phi : \underline{A} \rightarrow M(\underline{A})$ cho bởi

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= (L^A, \check{L}^A, \check{L}^A), \quad A \in \underline{A} \\ \Phi(u) &= L(u) : L^A \rightarrow L^B, \quad L(u)_X = u \otimes id_X\end{aligned}$$

trong đó $u : A \rightarrow B$.

Hơn nữa, Φ là một Ann-hàm tử cùng với các đẳng cấu $\check{\Phi}, \check{\check{\Phi}}$ xác định bởi các hệ thức

$$\begin{aligned}\check{\Phi}_{A,B}(X) &= \mathcal{R}_{X,A,B}, \quad A, B, X \in \underline{A} \\ \check{\check{\Phi}}_{A,B}(X) &= a_{A,B,X}^{-1}\end{aligned}$$

Ta còn phải chứng minh Φ là một tương đương. Xét hàm tử

$$\begin{aligned}J : M(\underline{A}) &\rightarrow \underline{A} \\ (F, \check{F}, \check{\check{F}}) &\mapsto F(I), \quad I \text{ là vật đơn vị của } \underline{A},\end{aligned}$$

và nếu $\varphi : F \rightarrow G$ là một M -mũi tên ta đặt

$$J(\varphi) = \varphi_I : F(I) \rightarrow G(I).$$

Ta sẽ chứng minh $J \circ \Phi \simeq id_{\underline{A}}$ và $\Phi \circ J \simeq id_{M(\underline{A})}$. Ta có

$$(J \circ \Phi)A = J(L^A, \check{L}^A, \check{L}^A) = L^A(I) = A \otimes I \stackrel{r_A}{\simeq} A = id_{\underline{A}}(A),$$

trong đó r là một ràng buộc đơn vị (phải) của $\underline{A}$, và nếu $f : A \rightarrow B$ thì

$$(J \circ \Phi)f = J(\Phi f) = (\Phi f)_I = f \otimes id_I : A \otimes I \rightarrow B \otimes I.$$

Điều đó có nghĩa là ta có mũi tên đẳng cấu

$$r : J \circ \Phi \xrightarrow{\sim} id_{\underline{A}}.$$

Bây giờ ta chứng tỏ rằng có một mũi tên đẳng cấu ρ giữa hai hàm tử $\Phi \circ J$ và $id_{M(\underline{A})}$ của phạm trù $M(\underline{A})$. Với mọi M -hàm tử F, G và mọi M -mũi tên $\varphi: F \rightarrow G$ ta có

$$\begin{aligned}\Phi \circ J(F) &= \Phi(FI) = L^{FI}, \\ \Phi \circ J(\varphi) &= \Phi(\varphi_I) : L^{FI} \rightarrow L^{GI}.\end{aligned}$$

Bởi vì với mọi $A \in \underline{A}$ ta có

$$L^{FI}(A) = FI \otimes A \xleftarrow{\tilde{F}} F(I \otimes A) \xrightarrow{F(l_A)} FA,$$

nên ta có thể xác định mũi tên hàm tử ρ như sau

$$\begin{aligned}\rho: \Phi \circ J &\rightarrow id_{M(\underline{A})}, \\ \rho_F: L^{FI} &\rightarrow F \text{ với } \rho_F(A) = F(l_A) \cdot (\tilde{F}_{I,A})^{-1}.\end{aligned}$$

Ta có thể chứng tỏ rằng ρ_F là một M -mũi tên giữa các M -hàm tử nên cách xác định trên đây của ρ là hợp lý.

Thật vậy, trước hết ρ_F thỏa mãn biểu đồ (2) khi xét biểu đồ sau

$$\begin{array}{ccccc} FI(AX) & \xleftarrow{\tilde{F}} & F(I(AX)) & \xrightarrow{F(l_{AX})} & F(AX) \\ & & \downarrow F(a) & \nearrow (II) & \downarrow \tilde{F} \\ \downarrow \tilde{L}^{FI} = a & & (I) \quad F((IA)X) & \xrightarrow{F(l_A \otimes id_x)} & (III) \quad F(AX) \\ & & \downarrow \tilde{F} & & \downarrow \tilde{F} \\ ((FI)A)X & \xleftarrow{\tilde{F} \otimes id} & F(IA)X & \xrightarrow{F(l_A) \otimes id_x} & (FA)X \end{array}$$

Trong biểu này miền (I) giao hoán bởi vì đó chính là biểu đồ (2) của M -hàm tử F ; miền (II) giao hoán do tính tương thích của đẳng cấu kết hợp a với các đẳng cấu đơn vị (I, l, r) trong một Ann-phạm trù (ảnh qua F); miền (III) giao hoán do tính hàm tử của F . Từ đó suy ra tính giao hoán của vòng ngoài, tức là của biểu đồ (2) đối với mũi tên ρ_F . Bằng cách tương tự, với những biểu đồ thích hợp ta kiểm chứng được ρ_F là một M -mũi tên. Như vậy $\Phi J \simeq id_{M(\underline{A})}$ và Φ là một tương đương. Định lý 7 được chứng minh hoàn toàn.

Định lý 8. Điều kiện $c_{X,X} = id$, với mọi $X \in \underline{A}$ (điều kiện chính qui) là cần và đủ để Ann-phạm trù $\underline{A}$ Ann-tương đương với Ann-phạm trù mà tất cả các đẳng cấu tự nhiên, trừ đẳng cấu phân phối trái, đều là đồng nhất.

C h ú r n g m i n h. Giả sử Ann-phạm trù A thỏa mãn điều kiện chính qui đối với đẳng cấu giao hoán c , nghĩa là $c_{X,X} = id$ với mọi $X \in A$. Khi đó theo phép chứng minh định lý II.3.3 [9] A Ann-tương đương với A' là Ann-phạm trù ACU-chặt chẽ đối với phép cộng $\oplus$. Khi đó theo Mệnh đề 3 $M(A')$ có đẳng cấu giao hoán c^* là phép đồng nhất.

Ngược lại, từ tính giao hoán của biểu đồ

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X \oplus X) & \xrightarrow{\Phi} & \Phi(X) \oplus \Phi(X) \\ \Phi(c) \downarrow & & \downarrow c = id \\ \Phi(X \oplus X) & \xrightarrow{\Phi} & \Phi(X) \oplus \Phi(X) \end{array}$$

suy ra $\Phi(c_{X,X}) = id$, trong đó Φ là Ann-tương đương. Từ đó ta có $c_{X,X} = id$.

Một bài toán đặt ra là điều kiện chính qui có phải là điều kiện đủ để một Ann-phạm trù Ann-tương đương với một Ann-phạm trù hoàn toàn chặt chẽ theo nghĩa tất cả các đẳng cấu tự nhiên đều là phép đồng nhất hay không?

Gần đây, Trần Phương Dung đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho bài toán trên. (xem [11]). Phép chứng minh dựa trên định lý chuyển cấu trúc và phép dựng Ann-phạm trù các song tích của Nguyễn Tiến Quang [9] cùng với định lý về sự thể hiện cản trở của lý thuyết mở rộng vành.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hoàng Xuân Sính: Gr-categories, Thèse, Paris, 1975.
2. Hoàng Xuân Sính: Gr-categories stricte, Acta Math. Vietnamica, Tom III (1978), No 2, 47-59.
3. M. L. Laplaza: Coherence for distributivity, Lect. Notes. Math. 281 (1972), 29-65.
4. M. L. Laplaza: Coherence for categories with group structure, J. Algebra, 84 (1983), No 2, 305-323.
5. S. MacLane: Natural associativity and commutativity, Rice University studies, 49 (1963), No 4, 28-46.
6. B. Mitchell: Low dimensional group cohomology and monoidal structure, Amer. J. Math. 105 (1983), 1049-1066.
7. Nguyễn Tiến Quang: Mở đầu về Ann-phạm trù, Tạp chí Toán học, Tập XV, số 4 (1987), 14-24.
8. Nguyễn Tiến Quang: Định lý khớp trong Ann-phạm trù, Tạp chí Toán học Tập XVI, số 1 (1988), 17-26.
9. Nguyễn Tiến Quang: Ann-phạm trù, Luận án Phó tiến sĩ, Hà nội, 1988.

10. Nguyễn Duy Thuận: Các $\otimes$ -phạm trừ chặt chẽ, Luận án Phó tiến sĩ, Hà nội, 1980.
11. Trần Phương Dung: Ann-phạm trừ chính qui và ứng dụng, Luận án Phó tiến sĩ, Hà nội, 1992.
12. K. H. Ulbrich: Kohärenz und kategorien mit Gruppenstruktur, J. Algebra. 72 (1981), No2, 279-295.

Khoa toán
Trường Đại học Sư phạm
Hà nội.

Nhận ngày 15-3-1991

NGUYEN HUU CONG

Abstract. In this paper, we study parallel iteration of predictor-corrector methods (Parallel PC methods) with direct collocation based implicit Runge-Kutta-Nystrom correctors for solving stiff initial-value problems for special second-order, ordinary differential equations (ODEs) on parallel computers. These iteration methods are such that in each step, the iterated method belongs to the class of diagonally implicit Runge-Kutta-Nystrom methods (DIRKN methods). By a suitable choice of the parameters in the iteration process, the parallel methods constructed in this paper are rather efficient for solving stiff initial-value problems on parallel computers.

1. INTRODUCTION

We shall be concerned with the integrating the initial-value problem for systems of special second-order, ordinary equations (ODEs) of dimension d

$$y''(t) = g(y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad y: R \rightarrow R^d, \quad g: R^d \rightarrow R^d, \quad t_0 \leq t \leq t_{end}.$$

Important test examples from this class of problems originate from structural mechanics. Such problems belong usually to the stiff class. Ideal method for solving this class of problems is the method which have, in addition to a high step point order and the property of A-stability, a high stage orders, in order to avoid the effect of order reduction (cf. [1]).

In this paper, we consider parallel iteration methods based on parallel iteration of fully implicit Runge-Kutta-Nystrom (RKN) methods of direct collocation type. Such RKN methods possess the largest possible stage order, so that we automatically achieve high stage orders if the method is used in sufficiently accurate (for an extensive investigation of such RKN methods see [8]).