Journal of Mathematics *Tạp chí Toán học* **21***(1 & 2)(1993), 69–80*

TÔ PÔ TRÊN KHÔNG GIAN CÁC DẠNG SONG TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC LIÊN KẾT VỚI ĐẠI SỐ TOÁN TỬ KHÔNG BỊ CHẶN

TRẦN VĂN ÂN

Abstract. *In this paper, we introduce locally convex topologies on $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$, and describe these topologies in case $t_{\mathcal{A}_i}$ is metrizable, $i = 1, 2$. Then, the relations between these topologies are established.*

0. MỞ ĐẦU

Khái niệm không gian các dạng song tuyến tính liên tục liên kết với đại số toán tử không bị chặn - không gian $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$ được K. Schmüdgen đề xướng và mô tả trong [4]. Mục đích xây dựng của ông là nhằm tổng quát hóa các kết quả quen biết từ lý thuyết đại số von Neumann, chẳng hạn định lý song hoán tập von Neumann và định lý trù mật Kaplansky của không gian tuyến tính $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

Trong bài này chúng tôi xây dựng các tô pô trên các không gian các dạng song tuyến tính liên tục $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$ nói trên, mô tả một cách tường minh các tô pô này trong trường hợp các tô pô đồ thị $t_{\mathcal{A}_1}$, $t_{\mathcal{A}_2}$ là khả metric và thiết lập mối quan hệ giữa chúng. Các kết quả này cũng coi như sự mở rộng các khái niệm tô pô trên $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ được nêu ra trong [1] và [4]. Ta bắt đầu bằng các định nghĩa và ký hiệu cần thiết.

Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert phức. Tích vô hướng của $\mathcal{H}$ được ký hiệu là $\langle .,. \rangle$. Gọi $\mathcal{D}$ là không gian con tuyến tính trù mật của $\mathcal{H}$. Đặt $\mathcal{L}^+(\mathcal{D}) = \{a \in \mathrm{End}(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*)$ và $a^*(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}\}$. Khi đó $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ là một $*$-đại số với phép nhân là phép hợp thành các toán tử và phép đối hợp $a \longrightarrow a^+ = a^*\big|_{\mathcal{D}}$. Một 0^* - đại số $\mathcal{A}$ trên miền $\mathcal{D}$ là một $*$-đại số con của $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ mà nó chứa ánh xạ đồng nhất I của $\mathcal{D}$. Giả sử $\mathcal{A}$ là một 0^*-đại số trên $\mathcal{D}$, tô pô đồ thị $t_{\mathcal{A}}$ là tô pô lồi địa phương trên $\mathcal{D}$ được xác định bởi họ các nửa chuẩn $\varphi \longrightarrow \|a\varphi\|$, $a \in \mathcal{A}$. Giả sử $\mathcal{A}_h = \{a \in \mathcal{A} : a = a^+\}$, $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : \langle a\varphi, \varphi\rangle \geq 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}\}$ và $a \geq b$ nếu $a - b \in \mathcal{A}_+$ với $a, b \in \mathcal{A}_h$.

Giả sử $\mathcal{A}_1$ và $\mathcal{A}_2$ là các 0^*-đại số trên các miền $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$ tương ứng của cùng một không gian Hilbert $\mathcal{H}$, Ký hiệu $\overline{\mathcal{D}_2'}$ là không gian véc tơ liên hợp phức của không gian véc tơ $\mathcal{D}_2' = \mathcal{D}_2[t_{\mathcal{A}_2}]'$, nghĩa là $\overline{\mathcal{D}_2'}$ bằng $\mathcal{D}_2'$ về mặt tập hợp, phép cộng trong $\overline{\mathcal{D}_2'}$ chính là phép cộng trong $\mathcal{D}_2'$, nhưng phép nhân với vô hướng trong $\overline{\mathcal{D}_2'}$ được thay bởi ánh xạ $(\lambda, \varphi) \longrightarrow \overline{\lambda} \cdot \varphi$, $\lambda \in \mathbf{C}$ và $\varphi \in \overline{\mathcal{D}_2'}$. Ánh xạ $\varphi \longrightarrow \langle ., \varphi\rangle$ là một đơn ánh của không gian Hilbert $\mathcal{H}$ vào không gian véc tơ $\overline{\mathcal{D}_2'}$. Do đó có thể xem $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{D}_2'}$ và ta cũng dùng ký hiệu $\langle \psi, \varphi\rangle$ để ký hiệu giá trị của phiếm hàm tuyến tính tùy ý φ của $\mathcal{D}_2'$ tại $\psi \in \mathcal{D}_2$ và ta viết $\langle \varphi, \psi\rangle$ thay cho $\overline{\langle \psi, \varphi\rangle}$.

Ta gọi $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$ là không gian véc tơ tất cả các ánh xạ tuyến tính x từ $\mathcal{D}_1$ vào $\overline{\mathcal{D}_2'}$ sao cho dạng song tuyến tính liên kết c_x được xác định bởi $c_x(\varphi, \psi) = \langle x\varphi, \psi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}_1$ và $\psi \in \mathcal{D}_2$, liên tục trên $\mathcal{D}_1[t_{\mathcal{A}_1}] \times \mathcal{D}_2[t_{\mathcal{A}_2}]$, nghĩa là tồn tại $a_1 \in \mathcal{A}_1$ và $a_2 \in \mathcal{A}_2$ sao cho $|c_x(\varphi, \psi)| = |\langle x\varphi, \psi\rangle| \leq \|a_1\varphi\|\|a_2\psi\|$ với mọi $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Khi đó, (theo [4], trang 311) ánh xạ $x \to c_x$ là một song ánh tuyến tính của $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$ lên không gian véc tơ tất cả các dạng song tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}_1[t_{\mathcal{A}_1}] \times \mathcal{D}_2[t_{\mathcal{A}_2}]$ (dạng song tuyến tính trên $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ ta hiểu là hàm giá trị phức trên $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ mà nó tuyến tính với biến thứ nhất và liên hợp tuyến tính với biến thứ 2).

1. CÁC BỔ ĐỀ

Trong phần này ta đưa ra một số bổ đề bổ trợ mà chúng cần thiết cho các phần sau.

Bổ đề 1.1. *Giả sử $\mathcal{A}$ là 0^*-đại số trên $\mathcal{D}$. Khi đó, với mỗi họ hữu hạn các $a_i \in \mathcal{A}_h$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tồn tại $b \in \mathcal{A}_h$ sao cho $\langle a_i\varphi, \varphi\rangle \leq \langle b\varphi, \varphi\rangle$ với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Chứng minh.

Giả sử $a_i \in \mathcal{A}_h$, $i = 1, 2, \ldots, n$, khi đó toán tử $b = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + I)$ là toán tử cần tìm.

Bổ đề 1.2. *Nếu $\mathcal{D}[t_{\mathcal{A}}]$ khả metric, thì tồn tại dãy $\{a_n\} \subset \mathcal{A}_h$ sao cho $t_{\mathcal{A}}$ được sinh bởi $\{a_n\}$ và các a_n thỏa mãn:*

(i) $a_1\varphi = \varphi$

(ii) $\langle a_n^2\varphi, \varphi\rangle \le \langle a_{n+1}\varphi, \varphi\rangle$

(iii) $\|a_n\varphi\| \le \|a_{n+1}\varphi\|$

với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$ và $n \in N$

Chứng minh.

Vì $\mathcal{D}[t_{\mathcal{A}}]$ khả metric, có một cơ sở lân cận của 0 là dãy giảm các lân cận tuyệt đối lồi $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \ldots$. Trước hết ta chọn $a_1 = I$. Do tập hợp $W_1 = \{\varphi : \|\varphi\| = \|a_1\varphi\| \le 1\}$ là một lân cận của 0 trong $\mathcal{D}[t_{\mathcal{A}}]$, nên tồn tại lân cận U_{t_1} trong số các lân cận $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ nói trên, sao cho $W_1 \supset U_{t_1}$. Lúc đó tồn tại các $c_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ sao cho

$$U_{t_1} \supset \{\varphi : \sup_{1\le i\le s} \|c_i\varphi\| \le 1\} = \{\varphi : \sup_{1\le i\le s} \langle c_i^+ c_i\varphi, \varphi\rangle \le 1\} \qquad (1)$$

Theo Bổ đề 1.1 tồn tại $a_2 \in \mathcal{A}_h$ sao cho $\langle c_i^+ c_i\varphi, \varphi\rangle \le \langle a_2\varphi, \varphi\rangle$ với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$ và $i = 1, 2, \ldots, s$. Do đó từ (1) ta có $W_1 \supset U_{t_1} \supset \{\varphi : \langle a_2\varphi, \varphi\rangle \le 1\}$. Từ các bao hàm thức cuối cùng này ta có $\|a_1\varphi\|^2 = \langle\varphi, \varphi\rangle \le \langle a_2\varphi, \varphi\rangle$ với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$. Hơn nữa, từ các bất đẳng thức $\|a_1\varphi\|^2 \le \langle a_2\varphi, \varphi\rangle \le \|a_2\varphi\|\|a_1\varphi\|$ ta suy ra $\|a_1\varphi\| \le \|a_2\varphi\|$ với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$ và ta có

$$U_{t_1} \supset \{\varphi : \langle a_2\varphi, \varphi\rangle \le 1\} \supset \{\varphi : \|a_2\varphi\|^2 \le 1\} = \{\varphi : \|a_2\varphi\| \le 1\} = W_2.$$

Giả sử đã chọn được các $a_i \in \mathcal{A}_h$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sao cho

$$\|\varphi\| = \|a_1\varphi\| \le \|a_2\varphi\| \le \cdots \le \|a_n\varphi\|, \quad \langle a_{i-1}^2\varphi, \varphi\rangle \le \langle a_i\varphi, \varphi\rangle \qquad (2)$$

với mọi $\varphi \in \mathcal{D}$ và

$$W_{i-1} \supset U_{t_{i-1}} \supset \{\varphi : \langle a_i\varphi, \varphi\rangle \le 1\} \supset \{\varphi : \|a_i\varphi\|^2 \le 1\} = \{\varphi : \|a_i\varphi\| \le 1\} = W_i \qquad (3)$$

với $i = 2, 3, \ldots, n$ và $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}$. Khi đó tồn tại $t_n > t_{n-1}$ sao cho $W_n = \{\varphi : \|a_n\varphi\| \le 1\} \supset U_{t_n}$. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các phần tử thuộc $\mathcal{A}$ sao cho

$$U_{t_n} \supset \{\varphi : \sup_{1\le j\le m} \|x_j\varphi\| \le 1\} = \{\varphi : \sup_{1\le j\le m} \langle x_j^+ x_j\varphi, \varphi\rangle \le 1\}.$$

Ta chọn $a_{n+1} \in \mathcal{A}_h$, theo Bổ đề 1.1, sao cho:

$$\langle x_j^+ x_j\varphi,\varphi\rangle \le \langle a_{n+1}\varphi,\varphi\rangle \quad \text{với mọi } \varphi\in \mathcal{D} \text{ và } j=1,2,\dots,m$$

và ta có

$$\begin{aligned} U_{t_{n-1}} &\supset \{\varphi:\langle a_n\varphi,\varphi\rangle\le 1\}\supset\{\varphi:\|a_n\varphi\|^2\le 1\}=\{\varphi:\|a_n\varphi\|\le 1\}\\ &= W_n\supset U_{t_n}\supset\{\varphi:\langle a_{n+1}\varphi,\varphi\rangle\le 1\}\supset\{\varphi:\|a_{n+1}\varphi\|^2\le 1\}\\ &=\{\varphi:\|a_{n+1}\varphi\|\le 1\}=W_{n+1} \end{aligned} \tag{4}$$

Như vậy từ (2) và (4) ta nhận được:

(ii) $\langle a_n^2\varphi,\varphi\rangle = \|a_n\varphi\|^2\le\langle a_{n+1}\varphi,\varphi\rangle$

(iii) $\|a_n\varphi\|\le\|a_{n+1}\varphi\|$

với mọi $\varphi\in\mathcal{D}$.

Đồng thời từ (4) suy ra rằng $t_{\mathcal{A}}$ được sinh bởi họ các nửa chuẩn $(\|a_n(\cdot)\|)n\in N$. Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

2. TÔ PÔ τ_b

Giả sử M_1, M_2 là các tập bị chặn tương ứng trong $\mathcal{D}_1[t_{\mathcal{A}_1}]$, $\mathcal{D}_2[t_{\mathcal{A}_2}]$. Với mỗi $x\in\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2')$ ta đặt: $P_{M_1\times M_2}(x)=\sup\limits_{(\varphi,\psi)\in M_1\times M_2}|\langle x\varphi,\psi\rangle|$. Khi đó $P_{M_1\times M_2}(\cdot)$ là một nửa chuẩn trên $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2')$.

Ký hiệu τ_b là tô pô lồi địa phương sinh bởi họ các nửa chuẩn $\{P_{M_1\times M_2}(\cdot)$ trong đó M_1, M_2 là các tập bị chặn tương ứng trong $\mathcal{D}_1[t_{\mathcal{A}_1}]$, $\mathcal{D}_2[t_{\mathcal{A}_2}]\}$ trên $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2')$.

Giả thiết rằng $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i=1,2$ là các không gian khả metric, khi đó theo Bổ đề 1.2 tồn tại các dãy $\left(a_n^{(i)}\right)_{n\in N}\subset\left(\mathcal{A}_i\right)_h$, $i=1,2$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) Tô pô đồ thị $t_{\mathcal{A}_i}$ của $\mathcal{D}_i$ được sinh bởi dãy các nửa chuẩn $\left(\|a_n^{(i)}(\cdot)\|\right)_{n\in N}$, $i=1,2$.

(ii) $a_1^{(i)}=I_{\mathcal{D}_i}$, $\langle a_n^{(i)^2}\varphi,\varphi\rangle\le\langle a_{n+1}^{(i)}\varphi,\varphi\rangle$ và $\|a_n^{(i)}\varphi\|\le\|a_{n+1}^{(i)}\varphi\|$ với mọi $\varphi\in\mathcal{D}_i$ và $n\in N$, $i=1,2$.

Định lý sau đây mô tả tô pô τ_b trên $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2')$ trong trường hợp các không gian $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i=1,2$, khả metric.

Định lý 2.1. *Giả sử $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1, 2$ là các không gian khả metric khi đó một cơ sở lân cận của 0 trong tô pô τ_b là họ các tập*

$$U(\varepsilon_n) = \Big\{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') : |\langle x\varphi, \psi\rangle| \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi\| \|a_n^{(2)}\psi\| \quad \forall(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\Big\}$$

trong đó (ε_n) là dãy các số dương bất kỳ.

Chứng minh.

Ta ký hiệu $h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi\| \|a_n^{(2)}\psi\|$ với $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Giả sử M_1, M_2 là các tập bị chặn trong $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ tương ứng. Đặt $c_n = \sup_{(\varphi,\psi)\in M_1\times M_2} \|a_n^{(1)}\varphi\| \|a_n^{(2)}\psi\|$, ta có $c_n < \infty$ với mọi $n \in N$. Giả sử ε_n là số dương sao cho $c_n\varepsilon_n \le 2^{-n}$ với $n \in N$, khi đó nếu $x \in U(\varepsilon_n)$ ta có $|\langle x\varphi, \psi\rangle| \le h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ với mọi $(\varphi, \psi) \in M_1 \times M_2$, nghĩa là $P_{M_1\times M_2}(x) \le 1$, hay

$$U(\varepsilon_n) \subset \big\{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') : P_{M_1\times M_2}(x) \le 1\big\}.$$

Ngược lại: Giả sử (ε_n) là dãy các số dương cho trước, ta đặt

$$\lambda^{(\varepsilon_n)}_{(\varphi,\psi)} = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu } h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{hoặc } h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) = \infty \\ h^{-1/2}_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) \quad \text{nếu } 0 < h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) < \infty \end{cases}$$

$$M_1 = \Big\{\lambda^{(\varepsilon_n)}_{(\varphi,\psi)} \cdot \varphi \,|\, \varphi \in \mathcal{D}_1 \text{ và } \psi = 0 \text{ hoặc } \|\psi\| \ge a > 0\Big\}$$
$$M_2 = \Big\{\lambda^{(\varepsilon_n)}_{(\varphi,\psi)} \cdot \psi \,|\, \psi \in \mathcal{D}_2 \text{ và } \varphi = 0 \text{ hoặc } \|\varphi\| \ge a > 0\Big\}$$

với a là số cố định.

Khi đó ta có $\|a_n^{(1)}(\theta)\| \le \dfrac{1}{\varepsilon_n \cdot a}$ với mọi $\theta \in M_1$ và mọi $n \in N$, $\|a_n^{(2)}(\xi)\| \le \dfrac{1}{\varepsilon_n \cdot a}$ với mọi $\xi \in M_2$ và mọi $n \in N$, nghĩa là, M_1 là tập $t_{\mathcal{A}_1}$ bị chặn, M_2 là tập $t_{\mathcal{A}_2}$ - bị chặn.

Bây giờ giả sử $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$ sao cho $P_{M_1\times M_2}(x) \le 1$ và (φ, ψ) bất kỳ thuộc $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$

- Trường hợp $\varphi = 0$ hoặc $\psi = 0$ ta có ngay $|\langle x\varphi, \psi\rangle| \leq h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi)$

- Trường hợp $\varphi \neq 0$ và $\psi \neq 0$ nếu $h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) = \infty$, hiển nhiên có $|\langle x\varphi, \psi\rangle| \leq h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi)$; nếu $h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi) < \infty$, khi đó tồn tại số $\mu > 0$ sao cho $\|\mu\varphi\| \geq a$ và $\|\mu\psi\| \geq a$ vì thế ta có

$$\frac{|\langle x\varphi, \psi\rangle|}{h_{(\varepsilon_n)}(\varphi, \psi)} = \frac{|\langle x(\mu\varphi), \mu\psi\rangle|}{h_{(\varepsilon_n)}(\mu\varphi, \mu\psi)} = |\langle x\theta, \xi\rangle| \leq 1$$

trong đó $\theta = \lambda^{(\varepsilon_n)}_{(\mu\varphi,\mu\psi)} \cdot \mu\varphi \in M_1$ và $\xi = \lambda^{(\varepsilon_n)}_{(\mu\varphi,\mu\psi)} \cdot \mu\psi \in M_2$

nghĩa là

$$\{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\prime) : P_{M_1 \times M_2}(x) \leq 1\} \subset U(\varepsilon_n).$$

3. TÔ PÔ τ_f

Giả sử $\mathcal{A}_i$ là các 0^*-đại số trên $\mathcal{D}_i$ và τ_i^f là tô pô lồi trên địa phương $\mathcal{A}_i$ tương ứng, $i = 1, 2$ sao cho có một cơ sở lân cận của 0 gồm các tập tuyệt đối lồi, hút và $(\mathcal{A}_i)_+$ - bão hòa trong $(\mathcal{A}_i)_h$. Giả sử $\mathcal{B}_i$ là cơ sở lân cận của 0 theo tô pô τ_i^f và có các tính chất:

(B1) nếu $U \in \mathcal{B}_i, V \in \mathcal{B}_i$, thì tồn tại $W \in \mathcal{B}_i$ với $W \subset U \cap V$

(B2) nếu $U \in \mathcal{B}_i$ và mọi $\alpha \neq 0$ thì $\alpha U \in \mathcal{B}_i$

(B3) mỗi $U \in \mathcal{B}_i$ là tập tuyệt đối lồi và hút

Với mỗi cặp $(U, V) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, xét tập hợp

$$\begin{aligned} W_{U,V} = \{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') :\ & \text{tồn tại } (a_1, a_2) \in U \times V \text{ sao cho} \\ & |\langle x\varphi, \psi\rangle|^2 \leq |\langle a_1\varphi, \varphi\rangle| \times |\langle a_2\psi, \psi\rangle|, \quad \forall(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}. \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng họ các tập $\{W_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2\}$ lập thành một cơ sở lân cận của 0 trong một tô pô nào đó trên không gian $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$.

Ký hiệu τ_f là tô pô lồi địa phương trên $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2')$ mà một cơ sở lân cận của 0 là họ $\{W_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2\}$. Định lý sau đây mô tả tô pô lồi địa phương τ_f trong trường hợp các không gian $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1, 2$ khả metric.

Định lý 3.1. *Giả sử $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1, 2$ là các không gian khả metric, với tô pô $t_{\mathcal{A}_i}$ được sinh bởi họ các nửa chuẩn $(\|a_n^{(i)}(\cdot)\|)_{n \in N}$ tương ứng, $i = 1, 2$. Khi đó họ* *các tập:*

$$V(\varepsilon_n) = \{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') : \text{ tồn tại } k \in N \text{ để}$$
$$|\langle x\varphi, \psi\rangle| \le \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi\| \|a_n^{(2)}\psi\| \quad \text{với mọi } (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$$

trong đó (ε_n) là dãy các số dương tùy ý, lập thành một cơ sở lân cận của 0 trong tô pô τ_f

Chứng minh.

Vì $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1,2$ khả metric nên theo Bổ đề 1.2 ta có thể xem họ các nửa chuẩn $\left(\|a_n^{(i)}(\cdot)\|\right)_{n\in N}$, $i = 1,2$ có các tính chất:

$$a_1^{(i)}\varphi = \varphi, \quad \langle a_n^{(i)^2}\varphi, \varphi\rangle \le \langle a_{n+1}^{(i)}\varphi, \varphi\rangle, \quad \|a_n^{(i)}\varphi\| \le \|a_{n+1}^{(i)}\varphi\|$$

với mọi $\varphi \in \mathcal{D}_i$ và $n \in N$, $i = 1,2$. Khi đó theo [6] một cơ sở lân cận của 0 trong τ_i^f, $i = 1,2$ là họ các tập:

$$V_{(\varepsilon_n)}^{(i)} = \{a \in \mathcal{A}_i : \text{ tồn tại } k \in N \text{ sao cho}$$
$$|\langle a\varphi, \varphi\rangle| \le \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n \|a_n^{(i)}\varphi\|^2 \quad \text{với mọi } \varphi \in \mathcal{D}_i\}$$

trong đó (ε_n) là dãy các số dương tùy ý.

Bây giờ giả sử (ε_n) là dãy các số dương cho trước, xét tập hợp

$$V(\varepsilon_n) = \{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') : \text{ tồn tại } k \in N \text{ để}$$
$$|\langle x\varphi, \psi\rangle| \le \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi\| \|a_n^{(2)}\psi\| \quad \text{với mọi } (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}.$$

Chọn $\gamma_1 = \varepsilon_1$ và γ_n bằng qui nạp sao cho $2\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{1/2}\right) \cdot \gamma_n^{1/2} \le \varepsilon_n$. Khi đó theo trên

$$V^{(1)}_{(\gamma_n)} = \left\{a_1 \in \mathcal{A}_1 :\ \text{tồn tại } k \in N \text{ để } |\langle a_1\varphi, \varphi\rangle| \le \sum_{n=1}^{k} \gamma_n \|a_n^{(1)}\varphi\|^2,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}_1\right\}$$

$$V^{(2)}_{(\gamma_n)} = \left\{a_2 \in \mathcal{A}_2 :\ \text{tồn tại } \ell \in N \text{ để } |\langle a_2\psi, \psi\rangle| \le \sum_{n=1}^{\ell} \gamma_n \|a_n^{(2)}\psi\|^2,\ \forall \psi \in \mathcal{D}_2\right\}$$

là lân cận của 0 trong tô pô τ_1^f, τ_2^f tương ứng. Bởi thế, tồn tại $U_+ \in \mathcal{B}_1$ và $V_+ \in \mathcal{B}_2$ sao cho $U_+ \subset V^{(1)}_{(\gamma_n)}$, $V_+ \subset V^{(2)}_{(\gamma_n)}$. Xét lân cận sau đây trong τ_f

$$W_{U_+,V_+} = \left\{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') :\ \text{tồn tại } (a_1, a_2) \in U_+ \times V_+ \text{ sao cho } |\langle x\varphi, \psi\rangle|^2 \le |\langle a_1\varphi, \varphi\rangle||\langle a_2\psi, \psi\rangle| \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\right\}.$$

Lấy phần tử tùy ý $x \in W_{U_+,V_+}$ khi đó tồn tại $(a_1, a_2) \in U_+ \times V_+$ sao cho $|\langle x\varphi, \psi\rangle|^2 \le |\langle a_1\varphi, \varphi\rangle||\langle a_2\psi, \psi\rangle|$ với mọi $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Vì $a_1 \in U_+ \subset V^{(1)}_{(\gamma_n)}$, nên tồn tại $k \in N$ sao cho $|\langle a_1\varphi, \varphi\rangle| \le \sum\limits_{n=1}^{k} \gamma_n \|a_n^{(1)\varphi}\|^2$ với mọi $\varphi \in \mathcal{D}_1$, lại do $a_2 \in V_+ \subset V^{(2)}_{(\gamma_n)}$, nên tồn tại $\ell \in N$ sao cho $|\langle a_2\psi, \psi\rangle| \le \sum\limits_{n=1}^{\ell} \gamma_n \|a_n^{(2)}\psi\|^2$ với mọi $\psi \in \mathcal{D}_2$. Từ đó ta có

$$|\langle a_1\varphi, \varphi\rangle||\langle a_2\psi, \psi\rangle| \le \Big(\sum_{n=1}^{k} \gamma_n \|a_n^{(1)}\varphi\|^2\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\ell} \gamma_n \|a_n^{(2)}\psi\|^2\Big).$$

Giả sử $k \ge \ell$ khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned}
|\langle x\varphi, \psi\rangle| &\le \Big(\sum_{n=1}^{k} \gamma_n \|a_n^{(1)}\varphi\|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{k} \gamma_n \|a_n^{(2)}\psi\|^2\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(\sum_{n=1}^{k} \gamma_n^{1/2} \|a_n^{(1)}\varphi\|\Big)\Big(\sum_{n=1}^{k} \gamma_n^{1/2} \|a_n^{(2)}\psi\|\Big) \le \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi\|\, \|a_n^{(2)}\psi\|.
\end{aligned}$$

Điều này kéo theo $x \in V(\varepsilon_n)$. Bởi thế ta có $W_{U_+,V_+} \subset V(\varepsilon_n)$. Ngược lại, với lân cận tùy ý của 0 trong tô pô τ_f, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng nó có dạng:

$$W_{U,V} = \{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') : \text{tồn tại } (a_1, a_2) \in U \times V \text{ sao cho}$$
$$|\langle x\varphi, \psi\rangle|^2 \le |\langle a_1\varphi, \varphi\rangle||\langle a_2\psi, \psi\rangle|, \quad \forall(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$$

trong đó U (tương ứng V) thuộc $\mathcal{B}_1$ (tương ứng $\mathcal{B}_2$). Xét các dãy $c_n = a_n^{(1)+} a_n^{(1)} \in \mathcal{A}_1$ và $b_n = a_n^{(2)+} a_n^{(2)} \in \mathcal{A}_2$. Vì U (tương ứng V) thuộc $\mathcal{B}_1$ (tương ứng $\mathcal{B}_2$) nên tồn tại $\varepsilon_n^{(1)}$ và $\varepsilon_n^{(2)}$ sao cho $\varepsilon_n^{(1)} \cdot c_n \in U$ và $\varepsilon_n^{(2)} \cdot b_n \in V$ với $n = 1, 2, \ldots$ đồng thời $c_k^* = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}\varepsilon_n^{(1)} \cdot c_n \in U$ và $b_k^* = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}\varepsilon_n^{(2)} \cdot b_n \in V$ với mọi $k = 1, 2, \ldots$

Đặt $\varepsilon_n = \min\{(2^{-n}\varepsilon_n^{(1)})^{1/2}, (2^{-n}\varepsilon_n^{(2)})^{1/2}\}$, khi đó ta có lân cận

$$V(\varepsilon_n^2) = \{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') : \text{ tồn tại } k \in N \text{ sao cho}$$
$$|\langle x\varphi, \psi\rangle| \le \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n^2 \|a_n^{(1)}\varphi\|\|a_n^{(2)}\psi\| \text{ với mọi } (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2\}$$

được chứa trong $W_{U,V}$.

Thật vậy, nếu $x \in V(\varepsilon_n^2)$ khi đó tồn tại $k \in N$ sao cho

$$|\langle x\varphi, \psi\rangle|^2 \le \Big(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n^2 \|a_n^{(1)}\varphi\|\|a_n^{(2)}\psi\|\Big)^2 \le \Big(\sum_{n=1}^{k} 2^{-n}\varepsilon_n^{(1)}\|a_n^{(1)}\varphi\|^2\Big)$$
$$\times \Big(\sum_{n=1}^{k} 2^{-n}\varepsilon_n^{(2)}\|a_n^{(2)}\psi\|^2\Big) = |\langle c_k^*\varphi, \varphi\rangle| \; |\langle b_k^*\psi, \psi\rangle|$$

với mọi $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, nghĩa là $x \in W_{U,V}$.

4. QUAN HỆ GIỮA TÔ PÔ τ_b VÀ TÔ PÔ τ_f

Từ Định lý 2.1 và Định lý 3.1 ta có ngay

Hệ quả 4.1. *Nếu $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1, 2$ là các không gian khả metric, thì $\tau_b \subset \tau_f$*

Chú ý 4.2. Trong [5] K. Schmüdgen đã đưa ra thí dụ chứng tỏ rằng: có một không gian con tuyến tính trù mật $\mathcal{D}$ và một 0^*-đại số $\mathcal{A}$ sao cho trên $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ tô pô hội tụ đều trên các tập $t_{\mathcal{A}}$ - bị chặn của $\mathcal{D}$ khác với tô pô chặn nội liên kết. Lưu ý rằng trong trường hợp $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$ và $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ ta có: $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ và τ_b (tương ứng τ_f) là sự mở rộng của tô pô hội tụ đều trên các tập $t_{\mathcal{A}}$ bị chặn (tương ứng, tô pô chặn nội liên kết), điều đó cũng chứng tỏ rằng nói chung $\tau_b \neq \tau_f$.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để $\tau_b = \tau_f$

Định lý 4.3. *Nếu $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1, 2$ là các không gian Montel khả metric, thì $\tau_b = \tau_f$.*

Chứng minh.

Giả sử rằng tô pô đồ thị $t_{\mathcal{A}_i}$ được sinh bởi họ các nửa chuẩn $\left(\|a_n^{(i)}(\cdot)\|\right)_{n\in N}$ tương ứng, $i = 1, 2$ có các tính chất: (i), (ii) và (iii) của Bổ đề 1.2. Ta chỉ cần chứng minh rằng $U(\varepsilon_n) \subset V(2\varepsilon_n)$.

Giả sử rằng tồn tại $x \in U(\varepsilon_n)$ nhưng $x \notin V(2\varepsilon_n)$. Khi đó, do $x \in U(\varepsilon_n)$ nên

$$|\langle x\varphi, \psi\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi\| \|a_n^{(2)}\psi\| \tag{1}$$

với mọi $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Do $x \notin V(2\varepsilon_n)$ nên với mỗi $k \in N$ tồn tại $\varphi_k \in \mathcal{D}_1$ và $\psi_k \in \mathcal{D}_2$ sao cho

$$|\langle x\varphi_k, \psi_k\rangle| > \sum_{n=1}^{k} 2\varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi_k\| \, \|a_n^{(2)}\psi_k\|. \tag{2}$$

Bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả thiết rằng φ_k, ψ_k được chọn sao cho $|\langle x\varphi_k, \psi_k\rangle| = 1$ với mọi $k \in N$. Từ (2) suy ra rằng:

- Nếu $k < n$, thì

$$\|a_n^{(1)}\varphi_k\| \, \|a_n^{(2)}\psi_k\| \leq \max\left\{\|a_n^{(1)}\varphi_i\| \, \|a_n^{(2)}\psi_i\|;\ i = 1, \ldots, n-1\right\}$$

- Nếu $k \geq n$, thì

$$\|a_n^{(1)}\varphi_k\| \, \|a_n^{(2)}\psi_k\| \leq \frac{1}{2\varepsilon_n}.$$

Bởi thế với n cố định

$$\sup_{k\in N} \|a_n^{(1)}\varphi_k\| \, \|a_n^{(2)}\psi_k\| \leq M_n$$

trong đó

$$M_n = \max\left\{\frac{1}{2\varepsilon_n}; \|a_n^{(1)}\varphi_i\| \, \|a_n^{(2)}\psi_i\|, i = 1, 2, \ldots, n-1\right\}.$$

Lúc đó ta cũng có $\|\varphi_k\| \, \|a_n^{(2)}\psi_k\| \leq M_n$ với mọi $k \in N$ và $\|\psi_k\| \, \|a_n^{(1)}\varphi_k\| \leq M_n$ với mọi $k \in N$. Nhưng vì $\inf\limits_{k\in N} \|\varphi_k\| = c \neq 0$ và $\inf\limits_{k\in N} \|\psi_k\| = d \neq 0$, nên từ đó ta có:

$$\sup_{k\in N} \|a_n^{(1)}\varphi_k\| \leq M^+ \quad \text{và} \quad \sup_{k\in N} \|a_n^{(2)}\psi_k\| \leq M^{++}$$

nghĩa là, dãy $(\varphi_k)_{k\in N}$ bị chặn trong $\mathcal{D}_1[t_{\mathcal{A}_1}]$ và dãy $(\psi_k)_{k\in N}$ bị chặn trong $\mathcal{D}_2[t_{\mathcal{A}_2}]$. Do $\mathcal{D}_i[t_{\mathcal{A}_i}]$, $i = 1, 2$ là các không gian Montel, nên tồn tại dãy con $(\varphi_{k_r}, \psi_{k_r})_{r\in N}$ của dãy $(\varphi_k, \psi_k)_{k\in N}$ hội tụ tới phần tử $(\varphi_0, \psi_0) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Cố định số $m \in N$, nếu $k_r \geq m$, thì từ (2) ta có

$$\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi_{k_r}\| \, \|a_n^{(2)}\psi_{k_r}\| < \frac{1}{2}$$

Cho $k_r \longrightarrow \infty$ ta có

$$\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi_0\| \, \|a_n^{(2)}\psi_0\| \leq \frac{1}{2} \cdot$$

Vì m tùy ý, nên ta suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi_0\| \, \|a_n^{(2)}\psi_0\| \leq \frac{1}{2} \cdot \tag{3}$$

Từ cách xây dựng các dãy (φ_k) và (ψ_k) ta có

$$|\langle x\varphi_k, \psi_k\rangle| = 1 \quad \forall k \in N. \quad \text{Điều này kéo theo} \quad |\langle x\varphi_0, \psi_0\rangle| = 1. \tag{4}$$

Kết hợp (3) và (4) ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|a_n^{(1)}\varphi_0\| \, \|a_n^{(2)}\psi_0\| < |\langle x\varphi_0, \psi_0\rangle|.$$

Điều này mâu thuẫn với (1), vì thế ta có $\tau_f \subset \tau_b$.

Cùng với hệ quả 4.1 ta có điều phải chứng minh.

Lời cám ơn. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn của mình đối với Giáo sư K. Schmüdgen, người đã gửi cho những công trình chỉ dẫn để viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M. Friedrich und G. Lassner, *Angereicherte Hilbertraüme die zu Operatorenalgebren assoziiert sind*, Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math. Naturwiss. R. **27** (1978), (3), 245-251.

2. K. D. Kürsten, *The completion of the maximal* O^*p*-algebra on a Fréchet domain*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **22** (1986), 151-175.

3. H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York-London, 1966.

4. K. Schmüdgen, *Spaces of continuous sesquilinear forms associated with unbounded operator algebras*, Z. Analysis und Anwendungen, **7** (1988), 309-319.

5. ——— , *On topologization of unbounded operator algebras*, Rep. Math. Phys., **17** (1980), 359-371.

6. ———, *Unbounded operator algebras and representations*, Berlin, Akademic - Verlag, 1989.

Khoa Toán,
Đại học Sư phạm Vinh
Nghệ An, Việt Nam

Nhận ngày 31 - 1 - 1991