

CÁC NHÓM NGUỒN G CỦA LỚP ĐỒNG CHẤT

$\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$ VỚI $E_1(G) = p^{n(n+1)/2-1}$, $p > 2$

NGUYỄN NGỌC CHÂU

Abstract. In this paper we determine and classify the stem groups G of $p^{n(n+1)/2-1}$ elements of order less than or equal to p , where G belongs to the isoclinic class of p -groups such that $G/Z(G) \cong Z_p^n$ and $[G, G] \cong Z_p^{n(n-1)/2}$, $p > 2$.

1. MỞ ĐẦU VÀ KẾT QUẢ CHÍNH

Để phân loại các nhóm, P. Hall [2] đã đưa ra một quan điểm như sau: Trước hết hãy phân các nhóm thành từng lớp đồng chất (isoclinic) sau đó trong mỗi lớp đồng chất phân loại nhóm theo quan hệ đẳng cấu. Cũng trong [2], P. Hall đã chứng minh rằng trong mỗi lớp đồng chất tồn tại những nhóm G sao cho $Z(G) \subset [G, G]$. Các nhóm thỏa mãn tính chất này có cấp thấp nhất trong lớp và được gọi là nhóm nguồn (stem group) của lớp chứa nó.

Giả sử p là một số nguyên tố, $Z_p = Z/pZ$ là nhóm cyclic gồm p phần tử. Giả sử G là một nhóm sao cho $G/Z(G) \cong Z_p^n$, $n \geq 2$, khi đó $[G, G] \cong Z_p^t$, $1 \leq t \leq n(n-1)/2$. Trong [3] đã chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$, các nhóm G với $G/Z(G) \cong Z_p^n$ và $[G, G] \cong Z_p^{n(n-1)/2}$ đều thuộc cùng một lớp đồng chất, ký hiệu lớp này là $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$. Ký hiệu $E_t(G)$ là số phần tử có cấp $\leq p^t$ của nhóm G , trong [4] đã chứng minh được rằng:

i) Nếu G là một nhóm nguồn của lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$, khi đó tồn tại số nguyên h , $0 \leq h \leq n$, để

$$E_1(G) = \begin{cases} (h-1)p^{n(n-1)/2}, & \text{nếu } p = 2, \\ p^h p^{n(n-1)/2}, & \text{nếu } p > 2. \end{cases}$$

ii) Tồn tại duy nhất (sai khác một đẳng cấu) một nhóm nguồn G trong lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$ sao cho $E_1(G)$ ứng với $h = n$.

Mục đích của bài này là tiếp tục công việc của [4] trong trường hợp $E_1(G)$ ứng với $h = n-1$ và $p > 2$. Nghĩa là xác định và phân loại đẳng cấu các nhóm nguồn G trong lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$, $p > 2$, sao cho $E_1(G) = p^{n(n+1)/2-1}$.

Cho n và k là hai số nguyên sao cho $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$. Ký hiệu $G(k)$ là nhóm được sinh bởi tập $\{x_i, e_{uv}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq u < v \leq n\}$ và thỏa mãn các quan hệ xác định sau đây

$$\begin{aligned} [x_i, x_j, x_h] &= 1, & 1 \leq i, j, h \leq n, \\ [x_u, x_v] &= e_{uv}, & 1 \leq u < v \leq n, \\ x_i^p &= 1, & 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

$$x_i^p = \begin{cases} \prod_{1 \leq r \leq (k+1)/2} e_{(2r-1)2r}, & \text{nếu } k \text{ lẻ,} \\ \prod_{1 \leq r \leq k/2} e_{2r(2r+1)}, & \text{nếu } k \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Trong [5] đã chứng minh rằng nhóm $G(k)$ thuộc vào lớp đồng chất $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$, và khi $p > 2$ theo [4, Định lý 11] $E_1(G) = p^{n(n+1)/2-1}$.

Kết quả chính trong bài này là định lý sau

Định lý.

i) Giả sử G là một nhóm nguồn thuộc lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$, $p > 2$, sao cho $E_1(G) = p^{n(n+1)/2-1}$. Khi đó tồn tại k , $1 \leq k \leq n-1$, để G đẳng cấu với nhóm $G(k)$.

ii) $n-1$ nhóm $G(k)$ ở trên đôi một không đẳng cấu với nhau.

Trong trường hợp $p = 2$, do phép lấy lũy thừa p không bảo toàn phép toán trong G (xem [4]) nên việc phân loại đẳng cấu các nhóm có tính chất như định lý trên là rất phức tạp và cho đến nay vẫn còn là một vấn đề mở, ngoại trừ khi $n = 3$ đã được giải quyết trong [1]. Chúng tôi hy vọng rằng các kỹ thuật được sử dụng ở đây có thể mở rộng nhằm đóng góp hơn nữa vào việc giải quyết vấn đề này.

Từ đây các nhóm luôn luôn được giả thiết là p -nhóm, $p > 2$, và các ma trận được nói đến là ma trận với hệ số trên trường Z_p .

2. MA TRẬN BIỂU DIỄN CỦA MỘT NHÓM NGUỒN

TRONG LỚP $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$

Trước hết chúng tôi nhắc lại khái niệm nhóm con Frattini và một số tính chất của nó.

Định nghĩa 2.1. Giả sử G là một nhóm và M_G là tập tất cả các nhóm con cực đại của G . Khi đó nhóm con $\bigcap_{H \in M_G} H$ được gọi là nhóm con Frattini của G , ký hiệu $\Phi(G)$.

Mệnh đề 2.2 [6].

i) $\forall g \in \Phi(G)$, g là phần tử không sinh của nhóm G .

ii) Giả sử H là nhóm con chuẩn tắc của G . Khi đó $\Phi(G) \subset H \iff G/H$ là nhóm Aben sơ cấp.

2.3. Giả sử G là một nhóm nguồn của lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$ và $\{x_i\}$ là một cơ sở của $G/Z(G)$. Theo mệnh đề 2.2 ta có

$$G = \langle x_i; [x_i^p, x_j] = [[x_i, x_j], x_k] = 1, \quad 1 \leq i, j, k \leq n \rangle,$$

đồng thời do $[G, G] = Z(G) \cong Z_p^{n(n-1)/2}$, nên $\{[x_i, x_j]\}$, $1 \leq i < j \leq n$ là một cơ sở của $Z(G)$. Ký hiệu $x_{ij} = [x_i, x_j]$ và biểu diễn các x_i^p qua cơ sở $\{x_{ij}\}$ ta có

$$x_i^p = \sum_{h < k} a_i^{hk} x_{hk}, \quad a_i^{hk} \in Z_p,$$

các hệ số a_i^{hk} của các hệ thức trên hoàn toàn xác định nhóm G và lập thành một ma trận $n(n-1)/2$ hàng, n cột, ký hiệu $A(X)$

$$A(X) = \begin{pmatrix} a_1^{12} & a_1^{13} & \dots & a_1^{(n-1)n} \\ a_2^{12} & a_2^{13} & \dots & a_2^{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{12} & a_n^{13} & \dots & a_n^{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

Ma trận trên rõ ràng không phụ thuộc vào cách chọn đại biểu x_i trong lớp $x_i Z(G)$ mà chỉ phụ thuộc vào cơ sở $X = \{x_i\}$ của $G/Z(G)$. Mệnh đề sau đây cho phép ta gọi $A(X)$ là ma trận biểu diễn của nhóm G .

Mệnh đề 2.4 [4]. Giả sử G và H là hai nhóm nguồn của lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$. Khi đó G đẳng cấu với H khi và chỉ khi tồn tại $X = \{\underline{x}_i\}$ và $Y = \{\underline{y}_i\}$ lần lượt là cơ sở của $G/Z(G)$ và $H/Z(H)$ sao cho $A(X) = A(Y)$.

Mệnh đề sau đây cho thấy sự phụ thuộc của ma trận $A(X)$ vào cơ sở X của $G/Z(G)$.

Mệnh đề 2.5. [4]. Giả sử G là một nhóm nguồn của lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$, $X = \{\underline{x}_i\}$ là một cơ sở của $G/Z(G)$ và $Q = (q_{ij}) \in GL(n, Z_p)$. Khi đó

$$A(QX) = \begin{cases} \wedge Q^{-1} A(X) Q, & \text{nếu } p > 2, \\ \wedge Q^{-1} (A(X) Q + \hat{Q}), & \text{nếu } p = 2, \end{cases}$$

trong đó $\wedge Q$ là bình phương ngoài của ma trận Q (xem [4]) và $\hat{Q}$ là ma trận $n(n-1)/2$ hàng, n cột được xác định như sau

$$\hat{Q} = (q_j^{hk}) \quad \text{với} \quad q_j^{hk} = q_{hj} q_{kj}, \quad 1 \leq h < k \leq n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

3. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ

Mệnh đề sau đây cho ta một phép chứng minh phần i) của định lý

Mệnh đề 3.1. Giả sử G là một nhóm nguồn trong lớp $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$ với $E_1(G) = p^{n(n+1)/2-1}$. Khi đó tồn tại một cơ sở X trong $G/Z(G)$ để nhóm G có một ma trận biểu diễn $A(X)$ được xác định như sau

$$A(X) = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó

- i) Các thành phần của $n-1$ cột cuối cùng bằng 0 tất cả;
- ii) Tồn tại số nguyên k , $1 \leq k \leq n-1$, để cột đầu tiên có thành phần bằng 1 ở các hàng

$$\begin{cases} (2t-1)2t, & 1 \leq t \leq (k+1)/2, & \text{nếu } k \text{ lẻ,} \\ 2t(2t+1), & 1 \leq t \leq k/2, & \text{nếu } k \text{ chẵn,} \end{cases}$$

còn ngoài ra tất cả đều bằng 0.

Theo (2.3) nhóm G được xác định bởi ma trận như trên chính là nhóm $G(k)$ trong định lý.

Chứng minh. Vì $E_1(G) = p^{n(n+1)/2-1}$ nên theo [4, Định lý 1.1], trong $G/Z(G)$ tồn tại một cơ sở $X = \{x_u\}$, $1 \leq u \leq n$, sao cho chỉ có một u để $\text{ord}(x_u) = p^2$, còn các x_v , $v \neq u$, thì $\text{ord}(x_v) = p$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $u = 1$ và do đó theo (2.3) G có một ma trận biểu diễn $A(X)$ có dạng như sau

$$A(X) = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

trong đó cột đầu tiên khác 0 còn $n - 1$ cột cuối cùng đều bằng 0.

Gọi i_j là hàng có thành phần khác 0 đầu tiên trong cột 1 của ma trận $A(X)$ ở trên, ta xét i theo hai trường hợp sau đây:

Nếu $i = 1$. Chia cột 1 của ma trận A thành các khối A_t , $1 \leq t \leq [n/2]$, mỗi khối A_t gồm các hàng từ $(2t - 1)2t$ đến $(2t)n$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo t rằng tồn tại một phép đổi cơ sở trên $G/Z(G)$ để trong mỗi A_t chỉ có thành phần ở hàng $(2t - 1)2t$ bằng 0 hoặc 1, còn ngoài ra tất cả đều bằng 0.

Giả sử $j \neq 2$ và thành phần ở hàng $1j$ bằng $c \neq 0$. Khi đó theo [3, Mệnh đề 2.2], $A(R(2, c^{-1})P(2, j)X)$ là ma trận có dạng (1) với thành phần ở hàng 12 bằng 1. Xét lần lượt v đi từ 3 đến n , nếu thành phần ở hàng $1v$ bằng $d \neq 0$, theo [3, Mệnh đề 2.2] thì $A(Q(v, 2, d)X)$ là ma trận có dạng (1) với thành phần ở hàng 12 bằng 1, còn các thành phần ở hàng $1v$, $v \neq 2$, bằng 0. Tiếp theo xét lần lượt v đi từ 3 đến n , nếu thành phần ở hàng $2v$ bằng $d \neq 0$ thì theo [3, Mệnh đề 2.2] $A(Q(v, 1, d)X)$ là ma trận có dạng (1) với khối A_1 chỉ có thành phần ở hàng 12 bằng 1, còn ngoài ra tất cả đều bằng 0.

Giả sử trong mỗi A_t , $t < [n/2]$, chỉ có thành phần ở hàng $(2t - 1)2t$ bằng 0 hoặc 1, còn ngoài ra tất cả đều bằng 0. Bây giờ xét khối A_t , $t = [n/2]$. Nếu n chẵn và giả sử thành phần ở hàng $(n - 1)n$ bằng $d \neq 0$ thì theo [3, Mệnh đề 2.2], $A(R(n, d^{-1})X)$ là ma trận có dạng (1) và cột 1 có thành phần ở các hàng $(2t - 1)2t$ bằng 0 hoặc 1 còn ngoài ra tất cả đều bằng 0. Nếu n lẻ, giả sử các thành phần A_t , $t = (n - 1)/2$, không bằng 0 tất cả, gọi uv là hàng có thành phần bằng $d \neq 0$ đầu tiên trong A_t , $t = (n - 1)/2$, khi đó $u = n - 2$ hoặc $n - 1$. Giả sử $u = n - 2$ (trường hợp $u = n - 1$ thì lập luận tương tự), nếu $v = n$ thì cũng theo [3, Mệnh đề 2.2], $A(R(n - 1, d)P(n - 1, n)X)$ là ma trận thỏa mãn giả thiết quy nạp và trong $A_{(n-1)/2}$ có thành phần ở hàng $(n - 2)(n - 1)$ bằng 1. Xét lần lượt thành phần ở các hàng $(n - 2)n$ và $(n - 1)n$ của $A_{(n-1)/2}$. Nếu thành

phần ở hàng $(n-2)n$ (tương ứng $(n-1)n$ bằng $d \neq 0$ thì theo [3, Mệnh đề 2.2], $A(Q(n, n-1, d)X)$ (tương ứng $A(Q(n, n-2, p-d)X)$) là một ma trận có dạng (1) và cột 1 có thành phần ở các hàng $(2t-1)2t$ bằng 0 hoặc 1, còn ngoài ra tất cả đều bằng 0.

Bây giờ trong cột 1, nếu tồn tại u, v sao cho $2 \leq u < v \leq \lfloor n/2 \rfloor$ mà thành phần ở hàng $(2u-1)2u$ bằng 0, còn thành phần ở hàng $(2v-1)2v$ bằng 1, thì theo [3, Mệnh đề 2.2] ta có $A(P(u-1, v+1)P(u, v)X)$ là ma trận chỉ khác với A bằng cách hoán đổi hàng $(2u-1)2u$ cho hàng $(2v-1)2v$. Tiếp tục quá trình trên ta sẽ có ma trận mà mệnh đề đòi hỏi.

Nếu $i \neq 1$. Chia cột 1 của A thành các khối A_t , $0 \leq t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ trong đó A_0 gồm các thành phần từ hàng 12 đến hàng $1n$ và trong trường hợp này chúng đều bằng 0, còn các khối A_t , $1 \leq t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, gồm có từ hàng $2t(2t+1)$ đến hàng $(2t+1)n$. Bằng phép lập luận tương tự như phép chứng minh trường hợp $i = 1$, ta có được A là một ma trận mà mệnh đề đòi hỏi. Mệnh đề đã được chứng minh xong.

Bổ đề 3.2 [5]. Giả sử $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n chẵn, sao cho $\wedge A$ có tính chất sau:

$$\sum_{1 \leq j \leq n/2} a_{xy, (2j-1)2j} = \begin{cases} a_{11} \neq 0, & xy = (2t-1)2t, \quad 1 \leq t \leq n/2, \\ 0, & xy \text{ ở các nơi khác.} \end{cases}$$

Khi đó A là một ma trận không suy biến.

Mệnh đề sau đây cho ta một phép chứng minh phần ii) của định lý.

Mệnh đề 3.3. Giả sử h, k là hai số nguyên sao cho $1 \leq h < k \leq n-1$. Khi đó hai nhóm $G(h)$ và $G(k)$ được xác định như trong định lý là không đẳng cấu với nhau.

Chứng minh. Ta chứng minh mệnh đề bằng phản chứng.

Giả sử $h < k$ và hai nhóm $G(h)$ và $G(k)$ đẳng cấu với nhau, theo Mệnh đề 2.5 thì tồn tại $Q = (q_{ij}) \in GL(n)$ để

$$\wedge QA(h) = A(k)Q \quad (2)$$

trong đó $A(k)$ là ma trận biểu diễn nhóm $G(k)$ và được xác định như trong Mệnh đề 3.1.

Ta xét h và k theo hai trường hợp:

Vì ma trận R thỏa mãn đẳng thức (3), nên với $1 \leq x \leq 2u$, ta có

$$\sum_{1 \leq j \leq u} r_{x(2u+1), (2j-1)2j} = 0 \iff \begin{cases} r_{(2u+1)(x-1)} = 0, & \text{với } x \text{ chẵn,} \\ r_{(2u+1)(x+1)} = 0, & \text{với } x \text{ lẻ,} \end{cases}$$

và

$$\sum_{1 \leq j \leq u} r_{x(2(u+1)), (2j-1)2j} = 0 \iff \begin{cases} r_{2(u+1)(x-1)} = 0, & \text{với } x \text{ chẵn,} \\ r_{2(u+1)(x+1)} = 0, & \text{với } x \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Do đó

$$\sum_{1 \leq j \leq u} r_{(2u+1)(2u+2), (2j-1)2j} = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (3), do đó không tồn tại $Q \in GL(n)$ để (2) xảy ra. Vậy hai nhóm $G(h)$ và $G(k)$, $h \neq k$, không đẳng cấu với nhau.

Mệnh đề đã chứng minh xong và do đó định lý được chứng minh.

Lời cảm ơn. Chúng tôi xin cảm ơn Phó giáo sư Tiến sĩ Huỳnh Mùi đã tận tình hướng dẫn để đạt được kết quả trong bài này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. M. Hall and J. K. Senior, *The groups of order 2^n , $n \leq 6$* , Macmillan, New York, (1964).
2. P. Hall, *The classification of prime groups*, J. Reine Angew. Math., **182** (1940), 130-141.
3. Nguyễn Ngọc Châu, *Về lớp đồng chất của các nhóm G với $G/Z(G) \cong Z_p^n$* , Tạp chí Toán học, tập **XVI** (1988), số 2, 10-20.
4. ———, *Về nhóm nguồn trong họ $\Gamma_p(n, n(n-1)/2)$* , Tạp chí Toán học, Tập **XVIII** (1990), số 1, 28-32.
5. ———, *Về lớp đồng chất của các nhóm mở rộng tâm theo nhóm Abel sơ cấp*, Luận án Phó tiến sĩ, Hà Nội (1992).
6. M. Suzuki, *Group theory*, Springer Verlag, (1985).

Khoa Toán
Trường Cao đẳng Sư phạm
Quảng Nam - Đà Nẵng
Vietnam

Received September 4, 1991
Revised March 21, 1994