Mục lục

Lời nói đầu

Một trong những vấn đề quan trọng của lý thuyết vành kết hợp là mô tả cấu trúc của vành thông qua các tự đồng cấu của các không gian vectơ. Tuy nhiên điều này nói chung là không thể thực hiện được. Kết quả quan trọng đầu tiên của hướng nghiên cứu này là định lý phân loại các đại số nửa đơn hữu hạn chiều (trên các trường) được chứng minh bởi J.H.M. Wedderburn vào năm 1907. Hai mươi năm sau, E. Artin đã chứng minh được kết quả tương tự như định lý Wedderburn cho các vành nửa đơn tổng quát. Ngày nay kết quả này được gọi là Định lý Wedderburn-Artin. Định lý này nói rằng một vành là nửa đơn khi và chỉ khi nó là tích trực tiếp của hữu hạn vành ma trận trên những vành chia. Từ phép chứng minh của Định lý Wedderburn-Artin, chúng ta nhận ra rằng mỗi vành nửa đơn được phân tích duy nhất thành tích của hữu hạn những vành đơn Artin. Đồng thời mỗi vành đơn Artin chỉ là vành ma trận trên một vành chia. Điều này đưa đến cho chúng ta một vấn đề đó là mô tả các vành đơn tổng quát. Một lý do khác để vành đơn được quan tâm nghiên cứu là mỗi vành có đơn vị luôn có một vành thương là đơn. Điều này có nghĩa là nếu chúng ta hiểu được cấu trúc của vành đơn thì chúng ta có thể hiểu được phần nào cấu trúc của vành kết hợp tùy ý. Hiện nay vành đơn là đề tài khó và rất được quan tâm trong lĩnh vực nghiên cứu đại số kết hợp.

Năm 2005, G. Abrams và G. Aranda Pino xây dựng các đại số trên các trường từ các đồ thị có hướng và gọi là *Đại số đường đi Leavitt* (*Leavitt path algebra*) (xem [3]). Đại số này mở rộng đại số Leavitt $L_K(1, n)$ trong [8]. Trong [3, Theorem 3.11] Abrams và Aranda Pino đưa ra một tiêu chuẩn thuần túy đồ thị để đại số đường đi

Leavitt là đơn. Để chứng minh tiêu chuẩn này Abrams và Aranda Pino đưa ra một cấu trúc $\mathbb{Z}$-phân bậc cho đại số đường đi Leavitt (xem [3, Lemma 1.7]). Tuy nhiên chúng tôi không thể kiểm tra được khẳng định này dựa theo những gợi ý trong đó.

Mục đích chính của luận văn này là trình bày lại nội dung bài báo của Abrams và Aranda Pino [3]. Đồng thời, dựa trên chứng minh của Abrams và Aranda Pino, luận văn sẽ đưa ra phép chứng minh ngắn gọn hơn cho tiêu chuẩn nói trên.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: "Kiến thức chuẩn bị" trình bày một số định nghĩa và kết quả sẽ được sử dụng trong Chương 2. Đó là các khái niệm và tính chất cơ bản của vành, vành đơn, trường, môđun, đại số, đại số Leavitt.

Chương 2: "Đại số đường đi Leavitt" dựa trên bài báo của G. Abrams và G. Aranda Pino (2005): "The Leavitt path algebra of a graph, *Journal of Algebra*, (293), 319-334" (xem [3]), chương này sẽ trình bày cách xây dựng, một số tính chất cơ bản của đại số đường đi Leavitt và chứng minh lại tiêu chuẩn của Abrams và Aranda Pino về tính đơn của đại số đường đi Leavitt.

Qua bản luận văn, tác giả xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô và các cán bộ nhân viên trong Viện toán học đã dạy bảo và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học. Tác giả chân thành cảm ơn thầy hướng dẫn TS. Trần Giang Nam đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình làm luận văn. Cảm ơn gia đình, bạn bè và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song do thời gian và trình độ còn hạn chế nên bản luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Rất mong quý độc giả đóng góp ý kiến để bản luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Hà Nội, tháng 8 năm 2015

Tác giả

Hà Thị Thu Trang

DANH MỤC KÝ HIỆU

$\mathbb{Z}$	tập hợp số nguyên
$\mathbb{N}$	tập hợp số tự nhiên
$\mathbb{Q}$	tập hợp số hữu tỷ
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp số phức
$\mathbb{Z}_n$	tập hợp các số nguyên môđun n
$\emptyset$	tập rỗng
$a \in A$	phần tử a thuộc tập A
$a \notin A$	phần tử a không thuộc tập A
$A \subset B$	A là một tập con của B
$A \cup B$	hợp của hai tập A và B
$A \cap B$	giao của hai tập A và B
$A \backslash B$	hiệu của hai tập A và B
$\forall a$	với mọi a
$\exists a$	tồn tại a
R/I	vành thương của vành R theo iđêan I
$M \oplus N$	tổng trực tiếp của hai module M và N
$\mathrm{Ker}(f)$	hạch của đồng cấu f

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này sẽ trình bày khái quát những cấu trúc đại số được xác định bởi hai phép toán. Mục đầu của chương trình bày các định nghĩa về vành, trường, môđun, đại số và một số tính chất đặc trưng. Kiến thức ở mục này tác giả dựa theo tài liệu [1], [2], [7]. Dựa trên tài liệu [7, Chapter 1], mục hai sẽ trình bày một số tính chất và ví dụ về vành đơn. Mục cuối cùng sẽ trình bày khái quát về đại số Leavitt mà tác giả tham khảo dựa trên các tài liệu [4], [5], [6], [8], [9].

1.1 Vành

Định nghĩa 1.1. (i) Một tập hợp R được gọi là *vành* nếu trên R có hai phép toán hai ngôi, một gọi là *phép cộng* và một gọi là *phép nhân*, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(1) Tập hợp R là một nhóm Abel đối với phép cộng,

(2) Tập hợp R là nửa nhóm có đơn vị đối với phép nhân,

(3) Phép nhân phân phối đối với phép cộng từ hai phía.

Ta thường ký hiệu phần tử đơn vị đối với phép nhân của R là 1_R và phần tử không của nhóm Abel cộng R là 0_R. Trường hợp vành R đã xác định cụ thể thì ta ký hiệu đơn giản 1 cho phần tử đơn vị và 0 cho phần tử không của R.

(ii) Một vành R được gọi là *vành giao hoán* nếu phép nhân của R thỏa mãn tính chất giao hoán.

(iii) Một vành K được gọi là một *trường* nếu K là một vành giao hoán và mọi phần tử khác không của K đều có nghịch đảo. Nghĩa là tập hợp $K^* := K \setminus \{0\}$ lập thành một nhóm giao hoán đối với phép nhân của K.

Ví dụ 1.1. (i) Các tập số $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ và tập $\mathbb{Z}_n$ cùng với các phép toán nhân và cộng thông thường lập thành các vành giao hoán. Hơn nữa $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ là các trường. Đồng thời, vành $\mathbb{Z}_n$ là trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

(ii) Cho K là một trường. Tập $K[x]$ các đa thức một biến x có hệ số trên K cùng với phép cộng và nhân các đa thức thông thường lập thành một vành giao hoán.

(iii) Tập $C[a, b]$ các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b], a < b$, với các phép cộng và nhân hàm số là một vành giao hoán.

(iv) Cho R là một vành và $M_n(R)(n \geq 1)$ là tập gồm tất cả các ma trận vuông cấp n trên vành R. Khi đó $M_n(R)$ lập thành một vành không giao hoán với phép cộng và nhân ma trận thông thường.

(v) Cho K là một trường và V là một K-không gian vectơ. Ký hiệu $End_K(V)$ tất cả các ánh xạ tuyến tính từ V vào V. Khi đó $End_K(V)$ với phép cộng là cộng các ánh xạ thông thường và phép nhân là phép lấy ánh xạ hợp thành lập thành một vành không giao hoán.

Định nghĩa 1.2. Cho R là một vành và I là một tập con khác rỗng của R.
(i) I được gọi là *iđêan trái* (*phải*) của R nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) Với mọi $a, b \in I, a + b \in I$,

(2) Với mọi $a \in I$ và $r \in R, ra \in I$ $(ar \in I)$.

(ii) I được gọi là *iđêan* nếu I vừa là iđêan trái vừa là iđêan phải của R.
(iii) Một iđêan J của R được gọi là *cực đại* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $J \neq R$,

(2) Với mọi iđêan J' của R, nếu $J \subseteq J'$ và $J \neq J'$ thì $J' = R$.

Dễ thấy giao một họ các iđêan của một vành R lại là một iđêan của R. Khi đó ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.3. Cho S là tập con của vành R. Giao của họ tất cả các iđêan của R chứa S là iđêan bé nhất của R chứa S, ký hiệu là (S). Iđêan này được gọi là iđêan sinh bởi S và S được gọi là hệ sinh của iđêan đó.

Bổ đề 1.1. *Cho R là một vành và $\emptyset \neq A \subseteq R$. Khi đó iđêan của R sinh bởi tập A là tập hợp*

$$\{r_1a_1r_1' + ... + r_na_nr_n' \colon n \in \mathbb{N},\ r_1, ..., r_n, r_1', ..., r_n' \in R,\ a_1, ..., a_n \in A\}.$$

Chứng minh. Ta ký hiệu tập hợp nói trên là I và chứng minh $I = (A)$.

Trước hết ta chứng minh I là một iđêan chứa A. Thật vậy, với mọi $a \in A$ ta có $a = 1.a.1 \in I$ nên $A \subseteq I$.

Do $A \neq \emptyset$ nên $I \neq \emptyset$. Giả sử $a, b \in I$. Ta tìm được $n, m \in \mathbb{N}$: $r_i, r_i' \in R, a_i \in A$ sao cho $a = \sum_{i=1}^{n} r_ia_ir_i'$, $b = \sum_{i=n+1}^{n+m} r_ia_ir_i'$. Khi đó, ta có

$$a + b = \sum_{i=1}^{n} r_ia_ir_i' + \sum_{i=n+1}^{n+m} r_ia_ir_i' = \sum_{i=1}^{n+m} r_ia_ir_i' \in I$$

và với mọi $r \in R$

$$ra = r\sum_{i=1}^{n} r_ia_ir_i' = \sum_{i=1}^{n} (rr_i)a_ir_i' \in I,$$

$$ar = \sum_{i=1}^{n} r_ia_ir_i'r = \sum_{i=1}^{n} r_ia_i(r_i'r) \in I.$$

Vậy I là một iđêan chứa A.

Giả sử J là một iđêan của R chứa A. Lấy bất kì $a \in I$, ta có

$$a = \sum_{i=1}^{n} r_ia_ir_i'$$

với $n \in \mathbb{N}, r_i, r_i' \in R$ và $a_i \in A$. Vì $A \subseteq J$ và J là iđêan nên $r_ia_ir_i' \in J$, $\forall\ i = \overline{1, n}$. Do đó $a = \sum_{i=1}^{n} r_ia_ir_i' \in J$, suy ra $I \subseteq J$. Điều này chỉ ra rằng I là iđêan bé nhất của R chứa A hay $I = (A)$. $\square$

Định nghĩa 1.4. Cho R và S là hai vành tùy ý. Ánh xạ $f : R \to S$ được gọi là một *đồng cấu vành*, nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y \in R$:

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(2) $f(xy) = f(x)f(y)$,

(3) $f(1_R) = 1_S$.

Đồng cấu vành f được gọi là *đơn cấu, toàn cấu* hay *đẳng cấu* nếu ánh xạ f tương ứng là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh.

Định lý 1.1. *Cho $f : R \to S$ là một đồng cấu vành từ vành R vào vành S và I là một iđêan của R. Khi đó:*

(i) *R/I là một vành với phép cộng và phép nhân được định nghĩa như sau: Với mọi $x, y \in R$*

$$(x+I) + (y+I) = (x+y) + I,$$

$$(x+I)(y+I) = xy + I.$$

(ii) *Nếu I là một iđêan của S thì $f^{-1}(I)$ là một iđêan của R. Đặc biệt hạt nhân $Ker(f) = f^{-1}(0_S)$ là một iđêan của R.*

(iii) *Nếu $I \subseteq Ker(f)$ thì f cảm sinh duy nhất đồng cấu $\overline{f} : R/I \to S$ sao cho $f = \overline{f} \circ p$, trong đó $p : R \to R/I$, $x \mapsto \overline{x}$ là toàn cấu chính tắc.*

Chứng minh. (i) Trước hết, ta chứng minh các định nghĩa trên không phụ thuộc vào cách chọn phần tử đại diện của lớp ghép. Cụ thể, cho x', $y' \in R$ sao cho $x+I = x'+I$ và $y+I = y'+I$ thì $x - x' \in I$ và $y - y' \in I$. Từ đó $(x+y)-(x'+y') = (x-x') + (y-y') \in I$, do vậy

$$(x+y) + I = (x'+y') + I.$$

Mặt khác tồn tại $a, b \in I$ sao cho $x' = x + a$ và $y' = y + b$. Khi đó nhờ luật phân phối của R, ta có $x'y' = (x+a)(y+b) = xy + (xb + ay + ab)$. Rõ ràng $xb + ay + ab \in I$ vì I là một iđêan. Suy ra $x'y' - xy \in I$. Vậy

$$xy + I = x'y' + I.$$

Như vậy các định nghĩa trên là hợp lí. Không khó khăn để chỉ ra rằng cùng với hai phép toán trên, R/I lập thành một vành với phần tử không là lớp ghép $0+I$ và phần tử đơn vị là lớp ghép $1+I$.

Vành R/I xác định như trên được gọi là *vành thương* của vành R theo iđêan I.

(ii) Cho I là một iđêan của S và $x, y \in f^{-1}(I)$. Khi đó $f(x), f(y) \in I$ kéo theo $f(x)+f(y)=f(x+y) \in I$. Vậy $x+y \in f^{-1}(I)$.

Mặt khác, với mọi $r \in R$:

$$f(rx)=f(r)f(x) \in I,\ f(xr)=f(x)f(r) \in I,$$

tức là $rx, xr \in f^{-1}(I)$. Vậy $f^{-1}(I)$ là một iđêan của R.

(iii) Xét tương ứng

$$\overline{f} : R/I \to S$$
$$\overline{x} \mapsto \overline{f}(\overline{x}) = f(x).$$

Để chứng tỏ $\overline{f}$ là một ánh xạ, ta cần chỉ ra rằng với mọi $x, y \in R$, nếu $x+I=y+I$ thì $f(x)=f(y)$. Thật vậy từ điều kiện $x+I=y+I$ suy ra $x-y \in I \subseteq Ker(f)$. Do đó $f(x)-f(y)=f(x-y)=0_S$ và $f(x)=f(y)$.

Ta chứng minh $\overline{f}$ là đồng cấu. Cho $\overline{x}=x+I$ và $\overline{y}=y+I$ là hai phần tử của R/I. Khi đó, ta có

$$\overline{f}(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{f}(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \overline{f}(\overline{x})+\overline{f}(\overline{y}),$$

$$\overline{f}(\overline{x}\,\overline{y}) = \overline{f}(\overline{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\overline{x})\overline{f}(\overline{y}),$$

$$\overline{f}(\overline{1}) = f(1) = 1.$$

Vậy $\overline{f}$ là một đồng cấu.

Bây giờ với mọi $x \in R$ ta có: $(\overline{f} \circ p)(x) = \overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, nghĩa là $f = \overline{f} \circ p$.

Tiếp theo, ta giả sử có $f' : R/I \to S$ là đồng cấu sao cho $f' \circ p = f$. Khi đó với mọi $\overline{x} \in R/I$ ta có $f'(\overline{x}) = f'(p(x)) = (f' \circ p)(x) = f(x) = (\overline{f} \circ p)(x) = \overline{f}(\overline{x})$.

□

Định nghĩa 1.5. (i) Cho R là một vành. Tập M được gọi là một R-*môđun trái* hay còn gọi là môđun trái trên R, nếu M là một nhóm cộng Abel và tồn tại một ánh xạ $R \times M \to M, (r, m) \mapsto rm$, gọi là *phép nhân với vô hướng* sao cho các tính chất sau được thỏa mãn với mọi $r, r' \in R$ và $x, y \in M$:

(1) $(r'r)x = r(r'x)$,

(2) $r(x + y) = rx + ry$ và $(r + r')x = rx + r'x$,

(3) $1m = m$.

Tương tự ta cũng có một định nghĩa cho R-môđun phải bằng cách xét phép nhân với vô hướng ở bên phải. Tuy nhiên để cho đơn giản ta chỉ xét các R-môđun trái và gọi ngắn gọn là R-môđun.

(ii) Giả sử M là một R-môđun, một tập con N của M được gọi là *môđun con* của M nếu N là một nhóm con cộng của nhóm Abel M và $RN \subseteq N$.

(iii) Cho M và N là hai R-môđun. Một ánh xạ

$$f : M \to N$$

được gọi là *đồng cấu môđun,* hay còn gọi là R-đồng cấu nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đối với mọi phần tử $x, y \in M$ và $r \in R$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(rx) = rf(x).$$

Đồng cấu f được gọi là *đơn cấu, toàn cấu* hay *đẳng cấu* môđun, nếu ánh xạ tương ứng là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh. Tập hợp tất cả các R-đồng cấu từ M vào N được ký hiệu là $Hom_R(M, N)$.

Ví dụ 1.2. (i) Mọi nhóm Abel cộng M đều có thể xem là $\mathbb{Z}$-môđun: Với $x \in M$ và $n \in \mathbb{Z}$ tùy ý, phép nhân với vô hướng được xác định là

$$nx = \begin{cases} x + ... + x & \text{(n lần) nếu } n > 0 \\ 0 & \text{nếu } n = 0 \\ (-x) + ... + (-x) & \text{(-n lần) nếu } n < 0. \end{cases}$$

(ii) Không gian vectơ là môđun trên trường.

(iii) Một vành R có thể xem là một môđun trên chính nó với phép nhân với vô hướng chính là phép nhân của vành. Do đó một iđêan trái (phải) của R là một R-môđun trái (phải).

(iv) Nếu R là một vành giao hoán và M, N là những R-môđun thì $Hom_R(M, N)$ là một R-môđun với phép cộng và nhân vô hướng xác định như sau:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \;\; (rf)(x) = rf(x),$$

trong đó $f, \; g \in Hom_R(M, N), \; r \in R, \; x \in M$.

(v) Cho I là một tập khác rỗng. Giả sử $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các R-môđun. Ký hiệu $M = \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ là tích Đề-các của họ $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$. Khi đó có thể xây dựng phép cộng trong M và phép nhân với vô hướng như sau:

$$(x_\alpha)_{\alpha \in I} + (y_\alpha)_{\alpha \in I} = (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in I},$$

$$r(x_\alpha)_{\alpha \in I} = (rx_\alpha)_{\alpha \in I},$$

với mọi $r \in R$ và với mọi $(x_\alpha)_{\alpha \in I}, \; (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in M$. Hai phép toán vừa xác định làm cho M trở thành một R-môđun. Bây giờ trong $M = \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ ta lấy ra một tập con $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ bao gồm tất cả các phần tử của M với các thành phần bằng không hầu hết, chỉ trừ một số hữu hạn thành phần có thể khác không. Khi đó với mọi

$$(x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$$

và với mọi $r \in R$, bởi các thành phần của $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ và $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I}$ bằng không hầu hết, trừ một số hữu hạn thành phần có thể khác không, nên $x + y, rx$ cũng như vậy. Do đó

$$x + y \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, \; rx \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha.$$

Vậy $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ là một R-môđun con của M, và nó được gọi là *tổng trực tiếp* của họ các R-môđun $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$. Nếu $M_\alpha = N$ với mọi $\alpha \in I$ thì ta ký hiệu $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ bởi $N^{(I)}$.

Giao của một họ các R-môđun con của M là môđun con của M. Đặc biệt, nếu S là một tập hợp con của M thì giao của tất cả các môđun con chứa S lại là một

R-môđun con của M, gọi là môđun con *sinh bởi tập hợp* S và S được gọi là một *hệ sinh* của môđun này.

Định nghĩa 1.6. Một R-môđun M có một hệ sinh S độc lập tuyến tính thì nó được gọi là một *môđun tự do* và tập S được gọi là một cơ sở của M.

Ví dụ 1.3. (i) Vành R là môđun tự do trên chính nó với cơ sở $\{1\}$. Tổng quát hơn, với I là một tập chỉ số bất kì, $R^{(I)}$ là một R-môđun tự do với cơ sở $\{e_i\colon i \in I\}$, trong đó e_i có thành phần thứ i bằng 1, các thành phần còn lại bằng 0. Cơ sở này được gọi là cơ sở tự nhiên hay cơ sở chính tắc của $R^{(I)}$.

(ii) Mỗi không gian vectơ trên một trường K đều là một K-môđun tự do, vì luôn có cơ sở.

(iii) Vành $\mathbb{Z}_6$ tất cả các lớp số nguyên thặng dư theo môđun 6 là một $\mathbb{Z}$-môđun. Tuy nhiên, do $6\overline{x} = \overline{0}$ với mọi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_6$ nên $\mathbb{Z}_6$ không có cơ sở và vì vậy nó không phải là một $\mathbb{Z}$-môđun tự do.

Định nghĩa 1.7. (i) Cho R là một vành giao hoán. Một tập hợp A được gọi là *R-đại số*, hay còn gọi là đại số trên R, nếu A là một R-môđun và tồn tại một phép toán hai ngôi

$$A \times A \to A, (a, b) \mapsto ab,$$

gọi là phép nhân, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$r(ab) = (ra)b = a(rb),$$

$$c(ra + r'b) = rca + r'cb,$$

$$(ra + r'b)c = rac + r'bc,$$

trong đó $r, r' \in R$ và $a, b, c \in A$ là những phần tử tùy ý.

(ii) R-đại số A được gọi là *đại số có đơn vị* nếu phép nhân trong A có đơn vị, tức là tồn tại phần tử $e \in A$ sao cho $ea = ae = a$ với mọi $a \in A$.

Trong luận văn này ta chỉ xét đến khái niệm đại số có đơn vị. Như vậy ta có thể xem các R-đại số là trường hợp riêng của vành.

(iii) Một tập hợp con B của R-đại số A được gọi là *đại số con* của A, nếu nó là một R-môđun con và đóng đối với phép nhân của A.

Tương tự như đối với môđun và vành, chúng ta có các định nghĩa đại số con sinh bởi một tập hợp cho trước và đồng cấu giữa các R-đại số.

Ví dụ 1.4. (i) Đại số ma trận $M_n(K)$: Tập $M_n(K)$ gồm các ma trận vuông cấp n trên trường K như đã biết là một K-không gian vectơ, phép nhân là nhân hai ma trận thỏa mãn các điều kiện trong Định nghĩa 1.7. Do đó $M_n(K)$ là một K-đại số.

(ii) Đại số tự do sinh bởi tập X: Cho K là một trường và $X = \{x_i \colon i \in I\}$ là một tập độc lập, không giao hoán và không xác định trên trường K. Ta ký hiệu

$$K\langle X\rangle \text{ hoặc } K\langle x_i \colon i \in I\rangle.$$

là tập các đa thức với các biến không giao hoán $\{x_i\}$ hệ số trên trường K. Trên $K\langle x_i \colon i \in I\rangle$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân tương tự như cộng và nhân của vành đa thức nhiều biến $K[x_i \colon i \in I]$ nhưng lưu ý rằng các biến $x_i, i \in I$ giao hoán với các phần tử của K nhưng không giao hoán với nhau. Khi đó, $K\langle x_i \colon i \in I\rangle$ là một K-đại số và được gọi là *K-đại số tự do sinh bởi tập X*.

(iii) Đại số đa thức Laurent: Xét K-đại số tự do $K\langle x, y\rangle$ sinh bởi $X = \{x, y\}$ và $I = (xy - 1, yx - 1)$ là iđêan của $K\langle x, y\rangle$. Khi đó, $K\langle x, y\rangle/I$ là một K-đại số. Đại số này được gọi là đại số đa thức Laurent, ký hiệu là $K[x, x^{-1}]$.

(iv) Đại số Toeplitz: Xét K-đại số tự do $K\langle x, y\rangle$ sinh bởi $X = \{x, y\}$ và $I = (yx - 1)$ là iđêan của $K\langle x, y\rangle$. Khi đó, $K\langle x, y\rangle/I$ là một K-đại số và được gọi là đại số Toeplitz.

1.2 Vành đơn

Định nghĩa 1.8. Một vành R được gọi là *vành đơn* nếu R chỉ có hai iđêan tầm thường là 0 và chính nó.

Ví dụ 1.5. (i) Mọi trường là vành đơn.

(ii) Cho vành R và I là iđêan cực đại của R. Khi đó, R/I là vành đơn.

(iii) Cho K là một trường, V là một K-không gian vectơ và $R := End_K(V)$. Khi đó, R là vành đơn khi và chỉ khi $dim_K V < +\infty$. Điều này được xem như là hệ quả rút ra từ Định lý 1.2 và Ví dụ 1.6.

(iv) Vành đa thức Laurent $K[x, x^{-1}]$ không là vành đơn. Thật vậy, cho đa thức $f = 1 + x \in K[x, x^{-1}]$ và xét iđêan $I := (f)$. Nếu $K[x, x^{-1}]$ là vành đơn thì tồn tại đa thức $g = \sum_{i=m}^{n} k_i x_i, k_i \in K, m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $g(1 + x) = 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} 1 = g(1+x) &= (\sum_{i=m}^{n} k_i x^i)(x+1) \\ &= \sum_{i=m}^{n} k_i x^{i+1} + \sum_{i=m}^{n} k_i x^i. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên ta thấy ngay điều vô lí. Vậy $K[x, x^{-1}]$ không là vành đơn.

(v) $C[a, b]$ không là vành đơn. Thật vậy, chọn $x_0 \in (a, b)$ và xét hàm $f = x - x_0$, đặt $I := (f)$. Giả sử $C[a, b]$ là vành đơn, khi đó tồn tại hàm $g \in C[a, b]$ sao cho $g(x - x_0) = 1$ với mọi $x \in [a, b]$. Tuy nhiên, ta thấy ngay tại $x = x_0$, vế trái của phương trình trên bằng 0, vế phải bằng 1. Điều này dẫn đến $C[a, b]$ không là vành đơn.

Mệnh đề 1.1. *Một vành R là đơn khi và chỉ khi với mọi $0 \neq a \in R$, tồn tại một số tự nhiên n và các phần tử $r_i, r'_i \in R$ sao cho: $r_1 a r'_1 + ... + r_n a r'_n = 1$.*

Chứng minh. Giả sử R là vành đơn và $0 \neq a \in R$. Đặt $I = (a)$. Theo Bổ đề 1.1, $I = \{\sum_{i=1}^{n} r_i a r'_i \colon r_i, r'_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$. Vì $a \in I$ nên $I \neq 0$. Do R là vành đơn nên $I = R$, suy ra $1 \in I$, nghĩa là tồn tại một số tự nhiên n và các phần tử $r_i, r'_i \in R$ sao cho: $\sum_{i=1}^{n} r_i a r'_i = 1$.

Ngược lại, giả sử I là iđêan khác không của R, khi đó tồn tại $0 \neq a \in I$. Theo giả thiết tồn tại một số tự nhiên n và các phần tử $r_i, r'_i \in R$ sao cho:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} r_1 a r'_1 + ... + r_n a r'_n \in I.$$

Điều này có nghĩa là $I = R$ và do đó R là vành đơn. $\square$

Áp dụng Mệnh đề 1.1, ta thu được cấu trúc của vành giao hoán đơn.

Hệ quả 1.1. *Một vành giao hoán R là đơn khi và chỉ khi R là một trường.*

Chứng minh. ($\Leftarrow$) Hiển nhiên.

($\Rightarrow$) Giả sử R là vành đơn và $0 \neq a \in R$. Theo Mệnh đề 1.1 tồn tại số tự nhiên n và các phần tử $r_i, r_i' \in R$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} r_i a r_i' = 1$. Do R là vành giao hoán, nên ta có:

$$a\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i r_i'\Big) = \sum_{i=1}^{n} a r_i r_i' = \sum_{i=1}^{n} r_i a r_i' = 1.$$

Điều này nghĩa là a có phần tử ngịch đảo, hay R là trường. □

Đối với lớp vành không giao hoán, việc xét tính đơn của nó khó khăn và phức tạp hơn nhiều. Định lý dưới đây cho ta một phương pháp để xây dựng vành đơn "mới" từ vành đơn đã biết.

Định lý 1.2. *Cho R là một vành. Khi đó $M_n(R)$ là đơn khi và chỉ khi R là vành đơn. Đặc biệt, nếu K là một trường thì $M_n(K)$ là vành đơn.*

Chứng minh. Trước hết ta có nhận xét: Nếu U là một iđêan của R, thì rõ ràng $M_n(U)$ là một iđêan của $M_n(R)$. Nếu U và B là hai iđêan của R thì ta cũng dễ dàng thấy rằng $U = B$ khi và chỉ khi $M_n(U) = M_n(B)$.

Giả sử R là vành đơn và I là một iđêan của $M_n(R)$. Đặt U là tập tất cả các phần tử m_{11} của các ma trận trong I. Khi đó U là một iđêan của R. Ta sẽ chứng minh $I = M_n(U)$. Thật vậy, với bất kì ma trận $M = (m_{ij})$ ta có đẳng thức

$$E_{ij} M E_{kl} = m_{jk} E_{il}. \tag{*}$$

trong đó E_{ij} biểu thị ma trận đơn vị chuẩn (i, j). Giả sử $M \in I$. Nếu $i = l = 1$, đẳng thức $(*)$ cho thấy $m_{jk} E_{11} \in I$ và do vậy $m_{jk} \in U$ với mọi j, k dẫn đến $I \subseteq M_n(U)$. Ngược lại, với bất kì $(a_{ij}) \in M_n(U)$ ta chứng minh $(a_{ij}) \in I$, tương đương với việc chỉ ra $a_{ij} E_{ij} \in I$ với mọi i, j. Do $(a_{ij}) \in M_n(U)$ nên tồn tại $M = (m_{ij}) \in I$ sao cho $a_{ij} = m_{11}$. Khi đó cho $j = k = 1$, từ $(*)$ dẫn đến:

$$a_{ij} E_{ij} = m_{11} E_{ij} = E_{i1} M E_{1j}.$$

Như vậy ta chỉ ra được $I = M_n(U)$. Vì R là vành đơn nên $U = R$, do đó theo nhận xét ở trên ta có $I = M_n(U) = M_n(R)$. Vậy $M_n(R)$ là vành đơn.

Bây giờ giả sử $M_n(R)$ là vành đơn và U là một iđêan của R. Khi đó theo nhận xét trên thì $M_n(U)$ là một iđêan của $M_n(R)$. Vì $M_n(R)$ là vành đơn nên $M_n(U) = M_n(R)$, do đó $U = R$. Vậy R là vành đơn.

Kết luận cuối cùng của Định lý suy ra trực tiếp từ phần chứng minh trên. $\square$

Tiếp theo ta sẽ trình bày một vài ví dụ không tầm thường về vành đơn.

Ví dụ 1.6. Cho K là một trường, $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i K$ là K-không gian vectơ chiều vô hạn đếm được, $R := End_K(V)$ và $I := \{f \in End_K(V)\colon rank(f) < +\infty\}$. Khi đó, R/I là một vành đơn.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh I là một iđêan. Giả sử $f, g \in I$ và $h \in R$. Khi đó:

$$rank(f+g) \leq rank(f) + rank(g) < +\infty,$$

$$rank(f \circ h) = rank(f(Im(h))) \leq rank(f(V)) < +\infty,$$

$$rank(h \circ f) = rank(h(Im(f))) < +\infty.$$

Suy ra $f+g, f \circ h, h \circ f \in I$. Vậy I là một iđêan.

Tiếp theo ta chứng minh I là iđêan cực đại của R. Giả sử I thực sự chứa trong một iđêan J nào đó của R, khi đó tồn tại một tự đồng cấu $g \in J \setminus I$. Vì $g \notin I$ nên $rank(g) = +\infty$. Ta viết $V = Ker g \oplus U$ và gọi $\{u_1, u_2, ...\}$ là một cơ sở của U. Khi đó $\{g(u_1), g(u_2), ...\}$ là một hệ độc lập tuyến tính, do đó tồn tại $f \in R$ sao cho $f(g(u_i)) = e_i$. Và như vậy lại tồn tại $h \in R$ sao cho $h(e_i) = u_i$. Cuối cùng ta có $f \circ g \circ h(e_i) = f(g(u_i)) = e_i$. Điều này có nghĩa là $J = R$ hay I là iđêan cực đại của R. Theo Ví dụ 1.5(ii), R/I là vành đơn. $\square$

Ví dụ 1.7. Cho K là một trường tùy ý. Đặt $R_0 = K$ và $R_i = M_{2^i}(K) (i \geq 0)$. Ta có thể xem R_i là một vành con của R_{i+1} bằng cách đồng nhất một ma trận $M \in R_i = M_{2^i}(K)$ với phần tử $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \in R_{i+1} = M_{2^{i+1}}(K)$. Bằng cách xây dựng đó, ta có một chuỗi các vành đơn

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq ...,$$

Đặt $R = \cup_{i \geq 1} R_i$. Khi đó R là một vành đơn.

Chứng minh. Cho I là một iđêan khác 0 của R. Khi đó $I \cap R_i \neq 0$ với mọi i và $I \cap R_i$ là một iđêan trong R_i. Do R_i là đơn nên $I \cap R_i$ chứa I và vì vậy $I = R$. □

1.3 Đại số Leavitt

Định nghĩa 1.9. Một vành R được gọi là thỏa mãn tính chất *IBN* (*Invariant Basic Number)* nếu:

$$R^i \cong R^j \Rightarrow i = j,$$

trong đó $i, j \in \mathbb{N}, R^i, R^j$ được xem là các R- môđun.

Trong [6, Chapter 1], T. Y. Lam đã cung cấp cho chúng ta nhiều lớp vành thỏa mãn tính chất IBN, chẳng hạn các vành giao hoán, các vành Noether một phía. Tuy nhiên vẫn có những ví dụ về vành không thỏa mãn tính chất IBN. Để thấy được điều này chúng ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1.2. *Cho R là một vành và $m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó, $R^m \cong R^n$ nếu và chỉ nếu tồn tại x_{ij}, y_{ji} của R sao cho:*

$$\sum x_{iv} y_{vk} = \delta_{ik} \quad (i, k = \overline{1, m}),$$

$$\sum y_{h\mu} x_{\mu j} = \delta_{hj} \quad (h, j = \overline{1, n}).$$

Chứng minh. Giả sử $R^m \cong R^n$. Khi đó tồn tại các đẳng cấu môđun

$$\phi \in Hom_R(R^m, R^n), \quad \psi \in Hom_R(R^n, R^m)$$

sao cho

$$\psi \circ \phi = id_{R^m}, \quad \phi \circ \psi = id_{R^n}.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận $m \times n$ và $n \times m$ hệ số trên R

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_R \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_R \end{pmatrix}$$

Thực hiện phép nhân ma trận thông thường ta có thể viết lại như sau

$$R^m \cong R^n, m, n > 1$$

nếu và chỉ nếu tồn tại $2mn$ phần tử $x_{ij}, y_{ji} \in R$ sao cho:

$$\sum x_{iv} y_{vk} = \delta_{ik} \quad (i, k = \overline{1, m}). \tag{*}$$

$$\sum y_{h\mu} x_{\mu j} = \delta_{hj} \quad (h, j = \overline{1, n}). \tag{**}$$

□

Ví dụ 1.8. Cho K là một trường, $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i K$ là K-không gian vectơ chiều vô hạn đếm được và $R := End_K(V)$. Khi đó $R \cong R^2$ (như các R-môđun).

Chứng minh. Chọn các $f_1, f_2, g_1, g_2 \in R$ như sau:

$$f_1(e_i) = e_{2i}, \; f_2(e_i) = e_{2i+1}$$

$$g_1(e_{2i}) = e_i,\ g_1(e_{2i+1}) = 0$$

$$g_2(e_{2i+1}) = e_i,\ g_2(e_{2i}) = 0$$

Ta có thể dễ dàng kiểm tra được các phương trình sau đây:

$$(f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2)(e_i) = e_i\ \forall i,$$

$$g_1 \circ f_1(e_i) = e_i,\ g_2 \circ f_2(e_i) = e_i\ \forall i,$$

$$g_1 \circ f_2(e_i) = 0,\ g_2 \circ f_1(e_i) = 0\ \forall i.$$

Suy ra $f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2 = 1_R,\ g_1 \circ f_1 = 1_R,\ g_2 \circ f_2 = 1_R,\ g_1 \circ f_2(e_i) = 0_R,\ g_2 \circ f_1(e_i) = 0_R$. Điều này có nghĩa là các phần tử $f_1, f_2, g_1, g_2 \in R$ thỏa mãn phương trình (*) và (**) với $m = 1, n = 2$. Theo Bổ đề 1.2 ta có $R \cong R^2$.

□

Bổ đề 1.3. *Cho R là một vành. Khi đó R có một trong hai tính chất sau đây:*
(i) R có tính chất IBN.
(ii) Tồn tại cặp $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ bé nhất theo quan hệ thứ tự từ điển sao cho $R^m \cong R^n$.

Một vành R thỏa mãn tính chất (ii) trong Bổ đề 1.3 được gọi là vành có *kiểu môđun* (m, n). Chẳng hạn có thể thấy ngay vành R xác định trong Ví dụ 1.8 có kiểu môđun (1, 2).

Từ Bổ đề 1.2, trong [8] Leavitt đã xây dựng một lớp các K-đại số có kiểu môđun (m, n). Cụ thể như sau:

Định nghĩa 1.10. Cho K là một trường, đặt

$$B = K\langle x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}, y_{11}, ..., y_{1m}, ..., y_{n1} ..., y_{nm}\rangle$$

là K-đại số tự do sinh bởi $2mn$ biến không giao hoán. Đặt

$$I = (\sum_{i,k=1}^{m} x_{iv}y_{vk} - \delta_{ik}, \sum_{h,j=1}^{n} y_{h\mu}x_{\mu j} - \delta_{hj})$$

và

$$A = B/I.$$

Khi đó tập $\{\overline{x_{ij}}, \overline{y_{ji}}\}$ thỏa mãn các phương trình như (*) và (**) ở trên. Do vậy, $A^m \cong A^n$ như là các A-môđun.

Đại số A xây dựng như trên được gọi là *Đại số Leavitt*, ký hiệu là $L_K(m,n)$.

Kết quả dưới đây đã được chứng minh bởi Leavitt (xem [9]) vào năm 1965. Sau đó, P.M. Cohn đã chứng minh lại theo một phương pháp khác trong [5]. Chúng tôi sẽ không trình bày chứng minh của kết quả này ở đây bởi vì nó sẽ được xem như hệ quả rút ra từ Định lý 2.1 trong Chương 2.

Định lý 1.3. *Cho K là một trường và $n \geq 2$ là một số tự nhiên. Khi đó $L_K(1,n)$ là một vành đơn.*

Lưu ý rằng khẳng định trên không còn đúng với $n = 1$. Thật vậy, dễ thấy rằng $L_K(1,1) \cong K[x, x^{-1}]$ và theo Ví dụ 1.5(iv), $K[x, x^{-1}]$ không là vành đơn. Do đó $L_K(1,1)$ cũng không là vành đơn.

Chương 2

ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT

Mục tiêu của chương này là chứng minh lại một kết quả của Abrams và Aranda Pino về điều kiện cần và đủ để đại số đường đi Leavitt là một vành đơn ([3, Theorem 3.11]). Mục đầu trình bày cách xây dựng và một số tính chất cơ bản của đại số đường đi Leavitt dựa trên các tài liệu [3] và [10]. Mục 2 trình bày chứng minh kết quả nói trên của Abrams và Aranda Pino và đặc biệt sẽ đưa ra các phép chứng minh ngắn gọn hơn so với chứng minh gốc của Abrams và Aranda Pino.

2.1 Đại số đường đi Leavitt

Định nghĩa 2.1. Một *đồ thị* $E = (E^0, E^1, r, s)$ bao gồm hai tập hữu hạn E^0, E^1 và các hàm $r, s : E^1 \to E^0$. Các phần tử của E^0 được gọi là đỉnh và các phần tử của E^1 được gọi cạnh. Đối với mỗi cạnh $e, s(e) = v$ được gọi là *gốc* và $r(e) = w$ được gọi là *ngọn* của e.

Một *đường* p trong đồ thị E là một chuỗi các cạnh $p = e_1...e_n$ sao cho $r(e_i) = s(e_{i+1})\ \forall i = \overline{1, n}$. Trong trường hợp này, ta nói $s(p) = s(e_1)$ và $r(p) = r(e_n), n$ là *độ dài* của p, kí hiệu là $|p|$. Ta quy ước các đỉnh trong E^0 có độ dài bằng không.

Định nghĩa 2.2. Cho K là một trường và $E = \{E^0, E^1, r, s\}$ là một đồ thị. *Đại số đường đi Leavitt của E với hệ số trên K*, ký hiệu bởi $L_K(E)$ là một K-đại số với hệ sinh là $\{v, e, e^*\colon v \in E^0,\ e \in E^1\}$ và thỏa mãn các đồng nhất thức sau:

(1) $vw = \delta_{vw}v \ \forall \ v, w \in E^0$,

(2) $e = er(e) = s(e)e, \ e^* = r(e)e^* = e^*s(e) \ \forall \ e \in E^1$,

(3) $e^*f = \delta_{ef}r(f) \ \forall \ e, f \in E^1$,

(4) $v \ = \ \sum_{\{e \,\in\, E^1:\, s(e) \,=\, v\}} ee^* \ \forall \ v \in E^0$ sao cho $s^{-1}(v) \neq \emptyset$.

Chú ý 2.1. Ta có thể xây dựng đại số đường đi Leavitt của một đồ thị bằng con đường như sau: Xét K-đại số tự do $A_E = K\langle v, e, e^*\colon \ v \in E^0, e \in E^1\rangle$. Gọi I là iđêan của A_E sinh bởi các phần tử có dạng:

(1) $vw - \delta_{vw}v \ \forall \ v, w \in E^0$,

(2) $e - er(e), e - s(e)e, e^* - r(e)e^*, e^* - e^*s(e) \ \forall \ e \in E^1$,

(3) $e^*f - \delta_{ef}r(f) \ \forall \ e, f \in E^1$,

(4) $v \ - \ \sum_{\{e \,\in\, E^1:\, s(e) \,=\, v\}} ee^* \ \forall \ v \in E^0$ sao cho $s^{-1}(v) \neq \emptyset$.

Khi đó $L_K(E) = A_E/I$. Với cách xây dựng này, đại số $L_K(E)$ có tính chất phổ dụng theo nghĩa: Nếu A là một K-đại số sinh bởi tập $\{a_v, b_e, c_{e^*}\colon v \in E^0, e \in E^1\}$ thỏa mãn $(1), (2), (3), (4)$ như trong Định nghĩa 2.2 thì tồn tại duy nhất một K-đồng cấu đại số $\phi : L_K(E) \to A$ sao cho $\phi(v) = a_v, \ \phi(e) = b_e, \ \phi(e^*) = c_{e^*}$ với mọi $v \in E^0$ và $e \in E^1$.

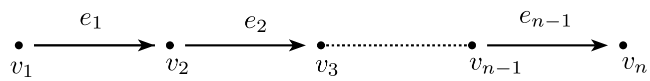
Hơn nữa, mọi phần tử của tập $\{v, e, e^*\colon v \in E, e \in E^1\} \subseteq L_K(E)$ đều khác không, điều này sẽ được làm rõ trong Mệnh đề 2.1 dưới đây. Trước hết ta xét một vài đại số quen thuộc có dạng $L_K(E)$ đối với một số đồ thị E.

Ví dụ 2.1. (i) Đại số ma trận $M_n(K)$: Cho đồ thị E xác định bởi

$$E^0 = \{v_1, ..., v_n\}, E^1 = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$$

và

$$s(e_i) = v_i, \ r(e_i) = v_{i+1} \ \forall i = \overline{1, n-1}.$$



Hình 2.1:

Khi đó $L_K(E) \cong M_n(K)$, thông qua ánh xạ φ :

$$v_i \mapsto E_{ii},\ e_i \mapsto E_{ii+1},\ e_i^* \mapsto E_{i+1i}$$

(ở đó E_{ij} biểu thị ma trận đơn vị chuẩn (i,j) trong $M_n(K)$). Để giảm sự phức tạp trong tính toán, ta sẽ kiểm tra với $n = 3$.

Với cách xác định trên, φ là một đồng cấu. Hơn nữa:

$$E_{13} = E_{12}E_{23} = \varphi(e_1)\varphi(e_2) = \varphi(e_1e_2)$$

$$E_{31} = E_{32}E_{21} = \varphi(e_2^*)\varphi(e_1^*) = \varphi(e_2^*e_1^*).$$

Điều này có nghĩa là với mọi $E_{ij} \in M_3(K)$, tồn tại $\alpha \in L_K(E)$ sao cho $\varphi(\alpha) = E_{ij}$. Do đó φ là toàn cấu.

Tiếp theo ta chứng minh φ là đơn cấu. Thật vậy, cho $\alpha \in L_K(E)$ sao cho $\varphi(\alpha) = 0$. Khi đó ta viết α dưới dạng:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} k_i v_i + \sum_{i=1}^{2} h_i e_i + h_3 e_1 e_2 + \sum_{i=1}^{2} l_i e_i^* + l_3 e_2^* e_1^*,$$

với $k_i, h_i, l_i \in K$. Vì $\varphi(\alpha) = 0$ nên ta có

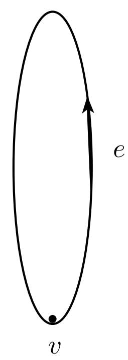
$$\sum_{i=1}^{3} k_i E_{ii} + \sum_{i=1}^{2} h_i E_{ii+1} + h_3 E_{13} + \sum_{i=1}^{2} l_i E_{i+1i} + l_3 E_{31} = 0.$$

Điều này suy ngay ra rằng $k_i = h_i = l_i = 0$. Vậy $Ker(\varphi) = 0$. Dẫn đến φ là đơn cấu.

Từ chứng minh trên ta thu được φ là đẳng cấu.

(ii) Đại số đa thức Laurent $K[x, x^{-1}]$: Cho đồ thị E xác định bởi

$$E^0 = \{v\},\ E^1 = \{e\}.$$



Hình 2.2:

Khi đó $L_K(E) \cong K[x, x^{-1}]$. Thật vậy, ánh xạ

$$\varphi : K\langle v, e, e^* \rangle \to K[x, x^{-1}]$$

$$v \mapsto 1$$

$$e \mapsto x$$

$$e^* \mapsto x^{-1}$$

là một toàn cấu. Hơn nữa:

$$\varphi(v^2 - v) = \varphi(v)\varphi(v) - \varphi(v) = 1.1 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\varphi(e - ev) = \varphi(e) - \varphi(e)\varphi(v) = x - x.1 = x - x = 0$$

$$\varphi(e - ve) = \varphi(e) - \varphi(v)\varphi(e) = x - 1.x = x - x = 0$$

$$\varphi(e^*e - v) = \varphi(e^*)\varphi(e) - \varphi(v) = x^{-1}x - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\varphi(v - ee^*) = \varphi(v) - \varphi(e)\varphi(e^*) = 1 - xx^{-1} = 1 - 1 = 0.$$

Suy ra $I = (v^2 - v, e - ev, e - ve, e^*e - v, v - ee^*) \subseteq Ker(\varphi)$. Do đó, theo tính chất phổ dụng của $L_K(E), \varphi$ cảm sinh đồng cấu $\overline{\varphi} : L_K(E) \to K[x, x^{-1}]$ sao cho

$$\overline{\varphi}(v) = \varphi(v) = 1, \;\; \overline{\varphi}(e) = \varphi(e) = x, \;\; \overline{\varphi}(e^*) = \varphi(e^*) = x^{-1}.$$

Mặt khác ta có ánh xạ $\quad \psi : K\langle x, x^{-1} \rangle \to L_K(E)$

$$1 \mapsto v$$

$$x \mapsto e$$

$$x^{-1} \mapsto e^*$$

là một toàn cấu. Hơn nữa,

$$\psi(xx^{-1} - 1) = ee^* - v = 0,\ \psi(x^{-1}x - 1) = e^*e - v = 0.$$

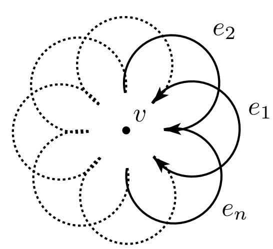
Do đó ψ cảm sinh đồng cấu

$$\overline{\psi} : K[x, x^{-1}] \to L_K(E)$$

sao cho: $\overline{\psi}(1) = \psi(1) = v,\ \overline{\psi}(x) = \psi(x) = e,\ \overline{\psi}(x^{-1}) = \psi(x^{-1}) = e^*$.
Kiểm tra được: $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = id_{L_K(E)}$, $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = id_{K[x,x^{-1}]}$. Vậy $L_K(E) \cong K[x, x^{-1}]$.

(iii) Đại số Leavitt $L_K(1, n)$ với $n \geqslant 2$: Xét đồ thị E xác định bởi

$$E^0 = \{v\},\ E^1 = \{e_1, ..., e_n\}.$$



Hình 2.3:

Lập luận tương tự Ví dụ 2.1(ii), ta chứng minh được $L_K(E) \cong L_K(1, n)$, thông qua ánh xạ:

$$\varphi : K\langle v, e_1, ..., e_n, e_1^*, ..., e_n^*\rangle \to L_K(1, n).$$

$$v \mapsto 1$$

$$e_i \mapsto x_i$$

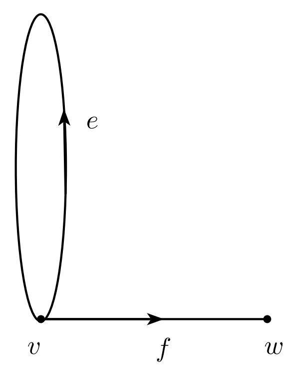
$$e_i^* \mapsto y_i$$

(iv) Đại số Toeplitz $K\langle x, y \colon yx = 1\rangle$: Xét đồ thị E xác định bởi

$$E^0 = \{v, w\},\ E^1 = \{e, f\}$$

và

$$s(e) = s(f) = v,\ r(e) = v,\ r(f) = w.$$



Hình 2.4:

Khi đó $L_K(E) \cong K\langle x, y \colon yx = 1\rangle$. Thật vậy ánh xạ

$$\varphi : K\langle v, w, e, f, e^*, f^*\rangle \to K\langle x, y \colon yx = 1\rangle$$

$$v \mapsto xy$$

$$w \mapsto 1 - xy$$

$$e \mapsto xxy$$

$$f \mapsto x - xxy$$

$$e^* \mapsto xyy$$

$$f^* \mapsto y - xyy$$

là một đồng cấu. Mặt khác, ta có:

$$\varphi(vw) = \varphi(v)\varphi(w) = xy(1 - xy) = xy - xyxy = xy - xy = 0.$$

Tương tự, ta nhận được:

$$\varphi(v^2 - v) = 0,\ \varphi(w^2 - w) = 0,\ \varphi(e - ve) = 0,\ \varphi(e - ev) = 0$$

$$\varphi(f - vf) = 0,\ \varphi(f - fw) = 0,\ \varphi(e^*e - v) = 0,\ \varphi(f^*f - w) = 0$$

$$\varphi(e^*f) = 0,\ \varphi(f^*e) = 0,\ \varphi(v - ee^* - ff^*) = 0.$$

Các đẳng thức trên chỉ ra rằng $I = (vw, v^2 - v, w^2 - w, e - ve, e - ev, f - vf, f - fw, e^*e - v, f^*f - w, e^*f, f^*e, v - ee^* - ff^*) \subseteq Ker(\varphi)$. Từ đó, theo tính chất phổ dụng, φ cảm sinh một đồng cấu giữa các K-đại số.

$$\overline{\varphi} : L_K(E) \to K\langle x, y\colon yx = 1\rangle$$

sao cho $$\overline{\varphi}(v) = xy,\ \overline{\varphi}(w) = 1 - xy,\ \overline{\varphi}(e) = xxy,$$

$$\overline{\varphi}(f) = x - xxy,\ \overline{\varphi}(e^*) = xyy,\ \overline{\varphi}(f^*) = y - xyy.$$

Xét K-đồng cấu đại số

$$\psi : K\langle x, y\rangle \to L_K(E)$$

như sau: $\psi(x) = e + f$, $\psi(y) = e^* + f^*$ và $\psi(1) = v + w$. Ta có:

$$\psi(yx - 1) = (e^* + f^*)(e + f) - (v + w) = e^*e + f^*f - v - w = 0.$$

Do đó ψ cảm sinh một đồng cấu $\overline{\psi} : K\langle x, y\colon yx = 1\rangle \to L_K(E)$ sao cho:

$$\overline{\psi}(x) = e + f,\ \overline{\psi}(y) = e^* + f^*,\ \overline{\psi}(1) = v + w.$$

Hơn nữa, $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = id$, $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = id$. Vậy $L_K(E) \cong K\langle x, y\colon yx = 1\rangle$.

Ta ký hiệu $(E^1)^* := \{e^*\colon e \in E^1, s(e) = r(e^*), r(e) = s(e^*)\}$. Với $p = e_1...e_n \in E$, ta ký hiệu $p^* = e_n^*...e_1^*$ và $v^* = v$ với mọi $v \in E^0$. Ta gọi các phần tử của E^1 là cạnh thực và các phần tử của $(E^1)^*$ là cạnh ảo. Khi đó ta có Mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ có những tính chất sau:*

(i) *Mọi phần tử của tập $\{v, e, e^*\colon v \in E^0, e \in E^1\}$ đều khác không.*

(ii) *Nếu k là một phần tử khác không của K thì $kv \neq 0$ với mọi $v \in V$.*

(iii) *Mỗi đơn thức trong $L_K(E)$có dạng kpq^* với $k \in K$, p, q là các đường trong E sao cho $r(p) = r(q)$.*

(iv)

$$p^*q = \begin{cases} \alpha & \textit{nếu } q = p\alpha \\ \beta^* & \textit{nếu } p = q\beta \\ r(p) & \textit{nếu } p = q \\ 0 & \textit{trong các trường hợp khác} \end{cases}$$

với p, q là hai đường bất kỳ trong E.

Chứng minh. (i) Ta sẽ xây dựng một K-đại số sinh bởi các phần tử khác không và thỏa mãn các đồng nhất thức $(1), (2), (3), (4)$ như trong Định nghĩa 2.2. Cho $Z := K^{(I)}$ là tổng trực tiếp đếm được các bản sao của K. Với mỗi $e \in E^1, v \in E^0$ đặt $A_e := Z$ và

$$A_v := \begin{cases} \oplus_{s(e)=v} A_e & \text{nếu } 0 < |s^{-1}(v)| < \infty \\ Z & \text{nếu } |s^{-1}(v)| = 0. \end{cases}$$

Ta có: $A_e \cong A_{e'} \cong A_v \cong A_{v'}\ \forall\ e, e', v, v' \in E$ vì chúng đều là tổng trực tiếp đếm được các bản sao của K. Đặt $A := \oplus_{v \in E^0} A_v$. Với mỗi $v \in E^0$, đặt

$$T_v : A_v \to A_v$$

là ánh xạ đồng nhất và mở rộng nó thành một đồng cấu

$$T_v : A \to A$$

bằng cách định nghĩa $T_v = 0$ trên $A \ominus A_v$. Tương tự như vậy, với mỗi $e \in E^1$, chọn một đẳng cấu

$$T_e : A_{r(e)} \to A_e \subseteq A_{s(e)}$$

và cũng mở rộng thành đồng cấu

$$T_e : A \to A$$

bằng cách định nghĩa $T_e = 0$ trên $A \ominus A_e$. Cuối cùng ta định nghĩa

$$T_{e^*} : A \to A$$

bằng cách lấy đẳng cấu

$$T_e^{-1} : A_e \subseteq A_{s(e)} \to A_{r(e)}$$

và mở rộng thành

$$T_{e^*} : A \to A$$

bằng cách định nghĩa $T_{e^*} = 0$ trên $A \ominus A_e$. Đặt T là đại số con của $Hom_K(A, A)$ sinh bởi tập $\{T_v, T_e, T_{e^*}\colon v \in E^0, e \in E^1\}$. Theo cách định nghĩa, các phần tử sinh của T thỏa mãn các đồng nhất thức sau:

(1) $T_v \circ T_w = \delta_{vw} T_v$,

(2) $T_e = T_{s(e)} \circ T_e = T_e \circ T_{r(e)}$,

(3) $T_{e^*} \circ T_f = \delta_{ef} T_{r(f)}$,

(4) $T_v = \sum_{\{e \in E^1\colon s(e)=v\}} T_e \circ T_{e^*}$.

Khi đó, do tính phổ dụng của $L_K(E)$ tồn tại K-toàn cấu đại số

$$\varphi : L_K(E) \to T$$

$$v \mapsto T_v$$

$$e \mapsto T_e$$

$$e^* \mapsto T_{e^*}.$$

Rõ ràng T_v, T_e, T_{e^*} là các đồng cấu khác không, vậy ta có điều cần chứng minh.

(ii) Với mọi $v \in E^0$, ta biểu diễn $A_v = K \oplus M$, với M là K-môđun nào đó. Khi đó, với mọi $k \in K^*$, ta có:

$$\varphi(kv)(1, 0) = kT_v(1, 0) = T_v(k, 0) = (k, 0) \neq 0.$$

Do đó $kv \neq 0$ với mọi $v \in E^0, k \in K^*$.

(iii) và (iv) dễ dàng suy ra ngay từ khẳng định $e^* f = \delta_{e,f} r(e)$ với mọi $e, f \in E^1$.

□

Bổ đề 2.1. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó $L_K(E)$ là một K-đại số có đơn vị và phần tử đơn vị là $\sum_{v \in E^0} v$.*

Chứng minh. Giả sử $E^0 = \{v_1, ..., v_n\}$ và

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$$

là đa thức trong $L_K(E)$, trong đó $k_i \in K, \lambda_j$ có dạng (iii)như trong Mệnh đề 2.1. Ta chứng minh: $\sum_{i=1}^{n} v_i$ là đơn vị của $L_K(E)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\Big)\alpha &= \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\Big)\lambda_1 + ... + \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\Big)\lambda_m \\
&= v_1 \sum_{i=1}^{n} k_i v_i + ... + v_n \sum_{i=1}^{n} k_i v_i + \lambda_1 + ... + \lambda_m \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \alpha.
\end{aligned}$$

Tượng tự ta cũng có $\alpha\big(\sum_{i=1}^{n} v_i\big) = \alpha$. Do đó $\sum_{i=1}^{n} v_i$ là đơn vị của $L_K(E)$. □

Định nghĩa 2.3. Một cạnh e được gọi là *lối rẽ* của đường $p = e_1...e_n$ nếu tồn tại $i \in \{1, ..., n\}$ sao cho $s(e) = s(e_i)$ và $e \neq e_i$.

Một *đường đóng tại* v là một đường $p = e_1...e_n$ với $n \geq 1$ và thỏa mãn $s(p) = r(p) = v$. Ký hiệu tập các đường đóng tại v là $\mathrm{CP}(v)$.

Một *đường đóng đơn tại* v là một đường đóng tại v: $p = e_1...e_n$ sao cho $s(e_i) \neq v$ với mọi $i > 1$. Ký hiệu tập các đường đóng đơn tại v là $\mathrm{CSP}(v)$.

Một *chu trình* là một đường $p = e_1...e_n$ sao cho $s(p) = r(p)$ và $s(e_i) \neq s(e_j)$ với mọi $i \neq j$.

Bổ đề 2.2. *Với mọi $p \in \mathrm{CP}(v)$, tồn tại duy nhất $c_1, ..., c_m \in \mathrm{CSP}(v)$ sao cho $p = c_1...c_m$.*

Chứng minh. Viết $p = e_{i_1}...e_{i_n}$. Đặt $T = \{t \in \{1, ..., n\}$: $r(e_{i_t}) = v\}$ và $t_1 < ... < t_m = n$ là tập tất cả các phần tử của T. Khi đó $c_1 = e_{i_1}...e_{i_{t_1}}$ và $c_j = e_{i_{t_{j-1}}}...e_{i_{t_j}}$ với $j > 1$ ta có được sự phân tích trên.

Để chứng minh cách phân tích trên là duy nhất, ta giả sử

$$p = c_1...c_r = d_1...d_s \tag{*}$$

trong đó $c_i, d_j \in \mathrm{CSP}(v)$ sao cho $|p| = \sum_{i=1}^{r} |c_i| = \sum_{j=1}^{s} |d_j|$. Không mất tính tổng quát, giả sử $r \leqslant d$. Nhân c_1^* vào bên trái hai vế của (*), ta nhận được

$$vc_2...c_r = \delta_{c_1,d_1} d_2...d_s.$$

Vế trái của đẳng thức trên khác không nên $\delta_{c_1,d_1} = 1$ hay $c_1 = d_1$. Do đó ta có

$$c_2...c_r = d_2...d_s.$$

Nhân vào bên trái hai vế của đẳng thức trên với c_2^*, và lập luận tương tự ta có được $c_2 = d_2$. Lặp lại quá trình trên ta thu được $c_i = d_i, \forall i = \overline{1, r}$. Khi đó, nếu $r < d$ thì

$$|p| = \sum_{i=1}^{r} |c_i| = \sum_{i=1}^{r} |d_i| < \sum_{j=1}^{s} |d_j| = |p|.$$

Điều này mâu thuẫn dẫn đến $r = s$. Ta có điều cần chứng minh. □

Bổ đề 2.3. *Cho đồ thị E, khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *Mọi chu trình đều có một lối rẽ;*

(ii) *Mọi đường đóng đều có một lối rẽ;*

(iii) *Mọi đường đóng đơn đều có một lối rẽ;*

(iv) *Với mọi $v \in E^0$, nếu $\mathrm{CSP}(v) \neq \emptyset$ thì tồn tại $c \in \mathrm{CSP}(v)$ có một lối rẽ.*

Chứng minh. (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i) là dễ thấy theo định nghĩa và (iii) ⇒ (iv) là hiển nhiên.

(i) ⇒ (ii). Xét $p \in \mathrm{CP}(v)$. Trước tiên, theo Bổ đề 2.2 ta có thể phân tích $p = c_1...c_m$, với $c_j \in \mathrm{CSP}(v)$, và ta xét c_m. Nếu c_m là một chu trình thì theo (i) ta có thể tìm được cho c_m một lối rẽ và do đó tìm được một lối rẽ cho p. Ngược lại, nếu c_m không là một chu trình, c_m sẽ đi qua một đỉnh (khác v) thuộc nó nhiều hơn một lần. Viết $c_m = e_1...e_s$ với $e_i \in E^1$ và đặt e_{s_0} là cạnh sau cùng trong số những cạnh e_j mà $s(e_j) \in \{s(e_i)\colon 1 \leq i \leq s, i \neq j\}$. Do đó, tồn tại $s_1 < s_0$ sao cho $s(e_{s_0}) = s(e_{s_1})$. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $e_{s_0} = e_{s_1}$ và $s_0 < s$. Khi đó $r(e_{s_0}) = r(e_{s_1})$, do đó $s(e_{s_0+1}) = s(e_{s_1+1})$, mâu thuẫn với cách chọn e_{s_0}.

Trường hợp 2: $e_{s_0} = e_{s_1}$ và $s_0 = s$. Nghĩa là $s(e_{s_1+1}) = r(e_{s_1}) = r(e_{s_0}) = r(e_s) = v$, điều này không thể xảy ra vì $c_m \in \mathrm{CSP}(v)$.

Trường hợp 3: $e_{s_0} \neq e_{s_1}$. Trong trường hợp này, e_{s_1} là một lối rẽ của c_m và do đó nó là lối rẽ của p.

Trong mỗi trường hợp, ta tìm thấy sự mâu thuẫn hoặc tìm được lối rẽ cho p.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Xét $c_1 \in \mathrm{CSP}(v)$. Bởi giả thiết ta tìm được $c_2 \in \mathrm{CSP}(v)$ có một lối rẽ. Nếu $c_1 = c_2$ thì ta có điều cần chứng minh. Nếu không, ta viết $c_1 = e_1 ... e_s, c_2 = f_1 ... f_r$ và tiếp tục thực hiện các bước sau:

Bước 1. Nếu $e_1 \neq f_1$ thì từ $s(e_1) = s(f_1) = v$ ta có f_1 là một lối rẽ của c_1.

Bước 2. Nếu $e_1 = f_1$ thì $r(e_1) = r(f_1)$, do đó $s(e_2) = s(f_2)$.

Bước 3. Nếu $e_2 \neq f_2$ thì tương tự Bước 1, f_2 là một lối rẽ của c_1.

Bước 4. Nếu $e_2 = f_2$ thì ta tiếp tục làm như Bước 2.

Với quá trình này, ta hoặc sẽ tìm được một lối rẽ cho c_1 hoặc sẽ xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $c_1 = c_2 e_t ... e_s$ với $t \leq s$. Nhưng điều này là không thể vì $s(e_t) = r(c_2) = v$ và $c_1 \in \mathrm{CSP}(v)$.

Trường hợp 2: $c_2 = c_1 f_q ... f_r$ với $q \leq r$. Trường hợp này cũng không thể xảy ra với cách lập luận như trên.

Trong bất kì trường hợp nào, ta đều tìm thấy sự mâu thuẫn, điều này cũng có nghĩa là luôn tìm được một lối rẽ cho c_1. □

2.2 Tính đơn của đại số đường đi Leavitt

Theo Mệnh đề 2.1(iii), mỗi đơn thức của $L_K(E)$ đều có dạng kpq^* với $k \in K$ và p, q là đường trong E sao cho $r(p) = r(q)$. Bây giờ, một đơn thức trong $L_K(E)$ được gọi là *đường thực* (*realpath*) nếu nó có dạng kp với $k \in K$ và p là một đường trong E. Một phần tử của $L_K(E)$ được gọi là một đa thức chỉ có cạnh thực nếu nó là tổng hữu hạn của những đường thực.

Bổ đề 2.2 nói rằng: Với mọi $p \in \mathrm{CP}(v)$, tồn tại duy nhất $c_1, ..., c_m \in \mathrm{CSP}(v)$ sao cho $p = c_1 ... c_m$. Khi đó, chỉ số m trong phân tích này được gọi là *bậc lặp lại* (tại

v) của p, ký hiệu là $\mathrm{RD}(p) = \mathrm{RD}_v(p) = m$. Ta quy ước $\mathrm{RD}_v(v) = 0$, và với một đa thức khác không dạng $\sum k_s p_s$, ta quy ước $\mathrm{RD}(\sum k_s p_s) = max\{\mathrm{RD}(p_s)\}$ trong đó $p_s \in \mathrm{CP}(v) \cup \{v\}$ và $k_s \in K^*$.

Trong [3], Abrams và Aranda Pino đã chứng minh được khẳng định sau: *Trong một đồ thị mà mọi chu trình của nó đều có một lối rẽ, nếu $\alpha \in L_K(E)$ là một đa thức chỉ có cạnh thực khác không thì tồn tại $a, b \in L_K(E)$ sao cho $a\alpha b \in E^0$.*

Họ đã chứng minh kết quả nói trên theo cách như sau:

+) Quy α về đa thức chỉ có cạnh thực mà mọi đơn thức của nó đều có điểm gốc và ngọn là v.

+) Tiến hành liên tiếp quá trình giảm bậc lặp lại tại v của đa thức đó cho đến khi bậc lặp lại bằng không.

Bây giờ chúng tôi sẽ đưa ra một cách chứng minh khác, đơn giản hơn cho kết quả nêu trên.

Bổ đề 2.4. *Cho K là một trường và E là đồ thị mà mọi chu trình của nó đều có lối rẽ. Nếu α là một đa thức chỉ có cạnh thực khác không thì tồn tại $a, b \in L_K(E)$ sao cho $a\alpha b \in E^0$.*

Chứng minh. Xét:
$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i$$
là đa thức trong $L_K(E)$, ở đó $k_i \in K^*, p_i$ là các đường thực phân biệt. Không mất tính tổng quát, ta có thể coi $s(p_i) = w, r(p_i) = v,\ \forall i = \overline{1, n}$. Giả sử p_1 là đường có độ dài ngắn nhất trong các p_i. Do $p_i \neq p_j$ với mọi $i \neq j$ nên áp dụng Mệnh đề 2.1 (iv) ta có

$$\begin{aligned} p_1^*\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i p_1^* p_i &= k_1 p_1^* p_1 + ... + k_n p_1^* p_n \\ &= k_1 v + h_2\alpha_2 + ... + h_m\alpha_m,\ h_i \in K^*, m \leq n. \end{aligned}$$

Chú ý là $\alpha_i \in \mathrm{CP}(v)$, theo Bổ đề 2.2 ta có $\alpha_i = c_i^{(1)}...c_i^{(t)}$, $c_i^{(j)} \in \mathrm{CSP}(v)$. Ta cố định một $c \in \{c_i^{(1)}: i = \overline{2,m}\}$, và viết $\alpha_i = c^{n_i} q_i$, trong đó $n_i \in \mathbb{N}$ và

$$q_i = \begin{cases} v \\ d_i q_i', \quad \text{với } c \neq d_i \in \text{CSP}(v),\ q_i' \in \text{CP}(v). \end{cases}$$

Đặt $k = max\{n_i: i = \overline{2,m}\}$. Ta có

$$(c^*)^k \alpha_i := \begin{cases} (c^*)^{k-n_i} & \text{nếu } q_i = v \\ 0 & \text{nếu } q_i = d_i q_i'. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (c^*)^k p_1^* \alpha &= (c^*)^k (k_1 v + h_2 \alpha_2 + ... + h_m \alpha_m) \\ &= k_1 (c^*)^k v + h_2 (c^*)^k \alpha_2 + ... + h_m (c^*)^k \alpha_m \\ &= k_1 (c^*)^k + ... + h_j (c^*)^{k-j} + hv \\ &= P(c^*) c^* + hv \qquad (*) \end{aligned}$$

trong đó $0 \leq k - j < k, P(c^*)$ là đa thức của c^* và $h \in K^*$.

Do mọi chu trình đều có lối rẽ, nên theo Bổ đề 2.3, c có lối rẽ giả sử là e_0. Điều này có nghĩa là nếu $c = e_1 ... e_s$ thì tồn tại $j \in \{1, ..., s\}$ sao cho $s(e_j) = s(e_0)$ và $e_j \neq e_0$. Đặt $z := e_1 ... e_{j-1} e_0$ ta có $c^* z = 0$. Khi đó, từ $(*)$ ta nhận được

$$(c^*)^k p_1^* \alpha z = (P(c^*) c^* + hv) z = hz.$$

Nhân vào bên trái đẳng thức trên với $h^{-1} z^*$ ta có

$$h^{-1} z^* (c^*)^k p_1^* \alpha z = h^{-1} z^* hz = h^{-1} h z^* z = r(z) \in E^0.$$

Nếu đặt $a := h^{-1} z^* (c^*)^k p_1^*$ và $b := z$ thì a, b là hai phần tử cần tìm . □

Từ Mệnh đề trên ta có ngay hệ quả sau:

Hệ quả 2.1. *Cho K là một trường và E là đồ thị mà mọi chu trình của nó đều có lối rẽ. Nếu J là một iđêan của $L_K(E)$ và chứa một đa thức khác không chỉ có cạnh thực thì $E^0 \cap J \neq \emptyset$.*

Định nghĩa 2.4. Cho đồ thị E, tập con $H \subseteq E^0$ và $v, w \in E^0$.

(i) $v \leq w$ nếu và chỉ nếu $v = w$ hoặc tồn tại một đường μ sao cho $s(\mu) = v$ và $r(\mu) = w$.

(ii) Tập H được gọi là *di truyền* nếu $v \in H$ và $v \leq w$ thì $w \in H$.

(iii) Tập H dược gọi là *bão hòa* nếu với $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ và $\{r(e)\colon s(e) = v\} \subseteq H$ thì $v \in H$.

Ta dễ dàng thấy rằng với mọi đồ thị E, tập E^0 luôn có hai tập di truyền và bão hòa là E^0 và $\emptyset$. Ta gọi chúng *di truyền và bão hòa tầm thường.*

Ví dụ 2.2. (i) Cho đồ thị E xác định bởi

$$E^0 = \{v_1, ..., v_n\}, E^1 = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$$

và

$$s(e_i) = v_i,\ r(e_i) = v_{i+1}\ \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Giả sử $H \neq \emptyset$ là tập di truyền và bão hòa trong E^0. Chọn $v_i \in H$. Vì H là tập di truyền nên ta có $v_{i+1}, ..., v_n \in H$.

Mặt khác, do tính bão hòa của H và $v_i \in H$ nên ta có $v_{i-1} \in H$. Quy nạp ta có $v_{i-1}, ..., v_1 \in H$. Và do vậy $H = E$. Điều này có nghĩa là không tồn tại tập di truyền và bão hòa không tầm thường trong E.

(ii) Cho đồ thị xác định bởi

$$E^0 = \{v\},\ E^1 = \{e_1, ..., e_n\}.$$

Rõ ràng là E chỉ có tập di truyền và bão hòa tầm thường.

(iii) Cho đồ thị xác định bởi

$$E^0 = \{v, w\},\ E^1 = \{e, f\}$$

và

$$s(e) = s(f) = v,\ r(e) = v,\ r(f) = w.$$

Khi đó nếu đặt $H_1 = \{v\},\ H_2 = \{w\}$ thì ta có thể kiểm tra được:

+) H_1 không là tập di truyền nhưng là tập bão hòa.

+) H_2 là tập di truyền và bão hòa.

Bổ đề 2.5. *Nếu J là một iđêan của $L_K(E)$ thì $J \cap E^0$ là tập di truyền và bão hòa của E^0.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $J \cap E^0$ là tập di truyền. Xét $v, w \in E^0$ sao cho $v \in J$ và $v \leq w$. Ta cần chứng minh $w \in J \cap E^0$ hay $w \in J$. Do $v \leq w$ nên tồn tại đường $\mu = \mu_1 ... \mu_n$ sao cho $s(\mu) = v$ và $r(\mu) = w$. Ta có:

$$\mu_1^* v \mu_1 = \mu_1^* \mu_1 = r(\mu_1) = s(\mu_2) \in J,$$

$$\mu_2^* s(\mu_2) \mu_2 = \mu_2^* \mu_2 = r(\mu_2) = s(\mu_3) \in J.$$

Lặp lại quá trình trên n lần ta nhận được:

$$\mu_n^* s(\mu_n) \mu_n = \mu_n^* \mu_n = r(\mu_n) = w \in J.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra $J \cap E^0$ là tập bão hòa: Xét $v \in E$ sao cho $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ và $\{r(e)\colon s(e) = v\} \subseteq J$. Khi đó, vì $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ nên $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$. Vì mỗi e xuất hiện trong tổng này đều có $r(e) \in J$ và vì J là iđêan nên $e = er(e) \in J$, suy ra $ee^* \in J$. Do đó, $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \in J$. Vậy $E \cap J$ là tập bão hòa. $\square$

Chú ý 2.2. (1) Trong [3, Lemma 1.7], Abrams và Aranda Pino đã đưa ra một cấu trúc $\mathbb{Z}$-phân bậc cho $L_K(E)$ như sau: $L_K(E) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} L_K(E)_n$, trong đó:

$$L_K(E)_0 = KE^0 + A_0,\ L_K(E)_n = A_n, n \neq 0,$$

$$A_n = \sum \{kpq^*\colon |p| - |q| = n\}.$$

(2) Hai Bổ đề 2.6 và 2.7 (dưới đây) đóng vai trò quan trong trong phép chứng minh của Định lý 2.1 (bên dưới). Chúng được Abrams và Aranda Pino chứng minh dựa trên phân bậc nói trên. Bây giờ chúng tôi chứng minh lại các kết quả đó mà không dựa vào cấu trúc $\mathbb{Z}$-phân bậc này.

Bổ đề 2.6. *Cho K là một trường và E là đồ thi thỏa mãn hai tính chất sau:*

(i) *E^0 chỉ có tập di truyền và bão hòa tầm thường.*

(ii) *Mọi chu trình đều có một lối rẽ.*

Khi đó, mọi iđêan khác không của $L_K(E)$ đều chứa một đa thức chỉ có cạnh thực.

Chứng minh. Abrams và Aranda Pino chứng minh kết quả này dựa vào $\mathbb{Z}$-phân bậc của $L_K(E)$ thông qua các bước như sau:

(+) Các tác giả định nghĩa *bậc ảo* (*ghost degree*) cho mỗi phần tử trong $L_K(E)$: Bậc ảo của đa thức $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i q_i^* \in L_K(E)$ là $max\{|q_i|: i = \overline{1, n}\}$.

(+) Các tác giả xét phần tử $\alpha \neq 0$ với bậc ảo nhỏ nhất trong một iđêan khác không cho trước. Nếu bậc ảo của α bằng không thì chúng ta có ngay điều cần chứng minh. Ngược lại bằng cách làm giảm bậc ảo của α, các tác giả đưa đến một mâu thuẫn.

Bây giờ chúng tôi sẽ đưa ra một phép chứng minh khác cho kết quả này.

Giả sử $0 \neq J$ là iđêan của $L_K(E)$. Ta chứng minh J chứa một đa thức $\alpha \neq 0$ chỉ chứa cạnh thực. Thật vậy, giả sử khẳng định này không đúng, tức là mọi đa thức khác không trong J đều có cạnh ảo. Ta có thể chọn một đa thức $0 \neq \alpha = p_1 q_1^* + ... + p_d q_d^* \in J$ sao cho:

+) $d = min\{n| \ \exists\, \alpha \in J: \alpha = p_1 q_1^* + ... + p_n q_n^*\}$,

+) $(|q_1|, ..., |q_d|) \in \mathbb{N}^d$ là nhỏ nhất theo quan hệ thứ tự từ điển.

Chú ý là một đa thức bất kì trong $L_K(E)$ có thể viết dưới dạng sau $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} \right)$, trong đó với mỗi j cho trước, α_{i_j} là những đường có chung điểm gốc và điểm ngọn. Vì tính cực tiểu của d nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng:

$$s(p_i) = v, s(q_i) = w.$$

Hơn nữa, với mọi $e \in E^1$, ta có $\alpha e = (p_1 q_1^* + ... + p_d q_d^*)e = 0$. Thật vậy, theo giả thiết tồn tại $i \in \{1, ..., d\}$ sao cho $|q_i| > 0$. Viết $q_i = f_{i_1} ... f_{i_n}$ ta có:

$$q_i^* e = f_{i_n}^* ... f_{i_1}^* e = \begin{cases} 0 & \text{nếu } e \neq f_{i_1} \\ f_{i_n}^* ... f_{i_2}^* & \text{nếu } e = f_{i_1}. \end{cases}$$

Nếu $e \neq f_{i_1}$ thì $\alpha e = p_1 q_1'^* + ... + p_c q_c'^*$ và $c < d$.

Nếu $e = f_{i_1}$ thì $\alpha e = p_1 q_1'^* + ... + p_d q_d'^*$ với $(|q_1'|, ...|q_d'|) < (|q_1|, ..., |q_d|)$.
Cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn với cách chọn d hoặc $(|q_1|, ..., |q_d|)$.

Để ý rằng $s^{-1}(w) \neq \emptyset$ vì nếu không thì α là đa thức chỉ có cạnh thực. Giả sử $s^{-1}(w) = \{e_1, ..., e_k\}$. Ta có $\alpha e_i e_i^* = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq k$. Khi đó:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha e_i e_i^* = \alpha \sum_{i=1}^{k} e_i e_i^k = \alpha w = \alpha.$$

Đẳng thức trên chỉ ra rằng $\alpha = 0$, điều này là vô lý, dẫn đến khẳng định trên là đúng và ta có điều cần chứng minh. □

Bổ đề 2.7. *Cho E là một đồ thị, K là một trường và p là một chu trình không có lối rẽ với $v = s(p)$. Khi đó $vL_K(E)v \cong K[x, x^{-1}]$.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh mọi phần tử của $vL_K(E)v$ đều có dạng

$$\sum_{i=m}^{n} k_i p^i,$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, k_i \in K^*$, và $p^i := (p*)^{-i}$ nếu $i < 0$, $p^0 := v$.

Thật vậy, cho $\alpha = \sum_{i=1}^{s} k_i p_i q_i^*$, trong đó $s \in \mathbb{N}, k_i \in K, p_i, q_i$ là các đường của E sao cho

$$s(p_i) = v = s(q_i), r(p_i) = r(q_i)\ \forall\ i.$$

Vì p là một chu trình không có lối rẽ và p_i, q_i là các đường xuất phát từ v nên $p_i = p^{n_{p_i}} p_i'$ và $q_i = p^{n_{q_i}} q_i'$ trong đó $n_{p_i}, n_{q_i} \in \mathbb{N}, p_i', q_i'$ là các đường xuất phát từ v và $|p_i'| < |p|, |q_i'| < |p|$. Nếu ta viết $p := e_1...e_h$ thì p_i', q_i' có dạng $p_i' = e_1...e_{t_i}, q_i' = e_1...e_{k_i}$ với $t_i, k_i < h$. Khi đó

$$p_i q_i^* = p^{n_{p_i}} e_1...e_{t_i} e_{k_i}^*...e_1^* (p^*)^{n_{q_i}} = \begin{cases} p^{n_{p_i}} (p^*)^{n_{q_i}} & \text{nếu } t_i = k_i \\ 0 & \text{nếu } t_i \neq k_i. \end{cases}$$

Đồng thời ta chú ý rằng vì $p^* p = v$ và $p^* p = v$ (vì p không có lối rẽ) nên

$$p^{n_{p_i}} (p^*)^{n_{q_i}} = \begin{cases} p^{n_{p_i} - n_{q_i}} & \text{nếu } n_{p_i} > n_{q_i} \\ (p^*)^{n_{q_i} - n_{p_i}} & \text{nếu } n_{q_i} > n_{p_i}. \end{cases}$$

Từ các đạt được này, ta suy ra $\alpha = \sum_{i=m}^{n} k_i p^i$.

Lưu ý rằng nếu chúng ta sử dụng $\mathbb{Z}$-phân bậc nói trên của $L_K(E)$ thì biểu diễn của $\alpha = \sum_{i=m}^{n} k_i p^i$ là duy nhất. Do đó kết quả là hiển nhiên. Tuy nhiên sau đây chúng tôi sẽ đưa ra một cách chứng minh khác cho kết quả này mà không dựa vào $\mathbb{Z}$-phân bậc nêu trên. Cụ thể, xét đồng cấu

$$\varphi : K[x, x^{-1}] \to vL_K(E)v$$

$$f \mapsto f(p).$$

Rõ ràng φ là một toàn cấu. Ta sẽ chứng minh φ còn là một đơn cấu. Thật vậy, giả sử $\varphi(f) = 0$ suy ra $f(p) = 0$. Viết $f(x) = \sum_{i=m}^{n} k_i x^i, k_i \in K, m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó vì $f(p) = 0$ nên $\sum_{i=m}^{n} k_i p^i = 0$.

Đặt $Z = K^{(I)}, A_e$ với $e \in E^1, A_v$ với $v \in E^0$ và A như trong chứng minh của Mệnh đề 2.1(i) và xét các đồng cấu T_v, T_e, T_{e^*} của A, với $v \in E^0, e \in E^1, e \in (E^1)^*$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $I = \mathbb{Z}$.

Ta viết $p = e_1 ... e_n$ với $e_i \in E$, trong đó $v_{i-1} := s(e_i)$ và $v_i := r(e_i), i = \overline{1, n}$, sao cho $v_0 = v_n = v$. Do cách xây dựng trong chứng minh của Mệnh đề 2.1, ta có $A_{v_{i-1}} = A_{e_i}$ vì p không có lối rẽ và T_{e_i} hạn chế thành một đẳng cấu $A_{v_i} \to A_{v_{i-1}}, \forall i$. Xét đồng cấu $T_p := T_{e_1} \circ ... \circ T_{e_n}$, hạn chế thành một đẳng cấu $T : A_v \to A_v$, trong đó $A_v = Z = K^{(\mathbb{Z})}$. Vì không hạn chế trong cách chọn các đẳng cấu trong phép chứng minh Mệnh đề 2.1 (i) nên ta có thể giả sử rằng $T(e_i) = e_{i+1}$ với mọi $i \in \mathbb{Z}$, trong đó $\{e_i\}$ là cơ sở của K-môđun $K^{(\mathbb{Z})}$.

Do $T_v, v \in E^0, T_e, e \in E^1, T_{e^*}, e^* \in (E^1)^*$ thỏa mãn các đồng nhất thức như trong Định nghĩa 2.2 nên từ $f(p) = 0$ suy ra $f(T) = 0$ trong $Hom_K(A, A)$. Từ cách chọn T ta có được

$$0 = f(T)(e_0) = \sum_{i=m}^{n} k_i T^i(e_0) = \sum_{i=m}^{n} k_i e_i.$$

Suy ra $k_i = 0$ với mọi i, dẫn đến $f = 0$ hay $Ker(\varphi) = 0$. Vậy φ là đơn cấu.

Từ chứng minh trên ta nhận được $K[x, x^{-1}] \cong vL_K(E)v$.

□

Định lý 2.1. *Cho E là một đồ thị, K là một trường. Khi đó $L_K(E)$ là vành đơn nếu và chỉ nếu E thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) E^0 *chỉ có tập di truyền và bão hòa tầm thường,*

(ii) *Mọi chu trình đều có một lối rẽ.*

Chứng minh. ($\Leftarrow$) Giả sử đồ thị E thỏa mãn điều kiện (i), (ii) và J là một iđêan khác không của $L_K(E)$. Ta chứng minh $J = L_K(E)$. Thật vậy, theo Bổ đề 2.6, J chứa một đa thức chỉ có cạnh thực. Áp dụng Hệ quả 2.1, ta có $J \cap E^0 \neq \emptyset$. Bởi giả thiết (i) và Bổ đề 2.5, ta suy ra $J \cap E^0 = E^0$, hay $E^0 \subseteq J$. Từ đạt được này và Bổ đề 2.1, ta thu được $J = L_K(E)$.

($\Rightarrow$) Giả sử $L_K(E)$ là đơn. Ta chứng minh E thỏa mãn hai điều kiện (i) và (ii) như nói trên. Thật vậy giả sử E chứa một chu trình không có lối rẽ p. Đặt $v = s(p)$. Theo Bổ đề 2.7 ta có $vL_K(E)v \cong K[x, x^{-1}]$. Khi đó theo Ví dụ 1.5(iv), $K[x, x^{-1}]$ không là vành đơn, do đó $vL_K(E)v$ cũng không là vành đơn.

Mặt khác, do $L_K(E)$ là vành đơn nên $vL_K(E)v$ là vành đơn [7, Theorem 21.11]. Điều này cho ta một mâu thuẫn. Vậy mọi chu trình của E phải có lối rẽ.

Tiếp theo, giả sử E^0 chứa một tập di truyền và bão hòa không tầm thường H. Khi đó, ta xây dựng một đồ thị mới như sau:

$$F = (F^0, F^1, r_F, s_F) = (E^0 - H, r^{-1}(E^0 - H), r|_{E^0 - H}, s|_{E^0 - H}).$$

Để đảm bảo F là một đồ thị, ta cần kiểm tra $s_F(F^1) \cup r_F(F^1) \subseteq F^0$. Rõ ràng theo định nghĩa ta có $r_F(F^1) \subseteq F^0$. Mặt khác, nếu $e \in F^1$ thì $s(e) \in F^0$ vì nếu $s(e) \notin F^0$ thì $s(e) \in H$, nhưng $r(e) \geq s(e)$ và H là tập di truyền nên $r(e) \in H$, mâu thuẫn với $e \in F^1$. Do đó F là một đồ thị. Xét đồng cấu

$$\varphi : A_E \to L_K(F)$$

$$v \mapsto \chi_{F^0}(v)v$$

$$e \mapsto \chi_{F^1}(e)e$$

$$e^* \mapsto \chi_{(F^1)^*}(e^*)e^*.$$

Ta sẽ chỉ ra iđêan I của A_E sinh bởi các phần tử dạng (1), (2), (3), (4) như trong Chú ý 2.1 nằm trong $Ker(\varphi)$. Thật vậy, việc tính toán đối với các phần tử dạng

(1), (2), (3) là đơn giản, ta sẽ chỉ kiểm tra với các phần tử dạng (4). Cho $v \in E^0$ sao cho $s^{-1}(v) \neq \emptyset$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $v \in H$. Khi đó, nếu $e \in E^1$ mà $s(e) = v$ thì $e \notin F^1$ (vì nếu $e \in F^1$ thì $r(e) \notin H$, mà H là tập di truyền nên $s(e) = v \notin H$). Vì vậy

$$\varphi\big(v - \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*\big) = 0 - \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} 0.0 = 0.$$

Trường hợp 2: $v \notin H$ và $v \notin s(F^1)$. Do H là tập bão hòa nên phải tồn tại cạnh $e \in E^1$ sao cho $s(e) = v$ và $r(e) \notin H$. Điều này có nghĩa là $e \in F^1$ với $s(e) = v$, mâu thuẫn với giả thiết $v \notin s(F^1)$. Như vậy Trường hợp 2 không xảy ra.

Trường hợp 3: $v \in H$ và $v \in s(F^1)$. Ta có:

$$\varphi\big(v - \sum_{\{e \in E : s(e) = v\}} ee^*\big) = \varphi\big(v - \sum_{\{e \notin F^1 : s(e) = v\}} ee^* - \sum_{\{e \in F^1 : s(e) = v\}} ee^*\big)$$

$$= v - 0 - \sum_{\{e \in F^1 : s(e) = v\}} ee^* = 0.$$

Như vậy trong mọi tình huống ta đều có $\varphi\big(v - \sum_{\{e \in E : s(e) = v\}} ee^*\big) = 0$. Do đó φ cảm sinh một K-đồng cấu đại số $\overline{\varphi} : L_K(E) \to L_K(F)$ sao cho

$$\overline{\varphi}(v) = \chi_{F^0}(v)v,\ \overline{\varphi}(e) = \chi_{F^1}(e)e,\ \overline{\varphi}(e^*) = \chi_{(F^1)^*}(e^*)e^*.$$

Bây giờ ta xét iđêan $Ker(\overline{\varphi})$ của $L_K(E)$. Vì $H \neq \emptyset$, nên tồn tại $v \in H$, vì vậy $0 \neq v \in Ker(\overline{\varphi})$. Vì $H \neq E^0$ nên tồn tại $w \in E^0 - H$, khi đó $\overline{\varphi}(w) = w \neq 0$, vì vậy $\overline{\varphi} \neq 0$. Hay nói cách khác $0 \neq Ker(\overline{\varphi}) \neq L_K(E)$, dẫn đến $L_K(E)$ không là vành đơn. □

Tiếp theo ta sẽ xét tính đơn của các đại số quen thuộc đã nêu ở trên bằng cách áp dụng kết quả vừa thu được để xét tính đơn của đại số $L_K(E)$ tương ứng với chúng.

Ví dụ 2.3. Cho K là một trường bất kỳ.

(i) Theo Định lý 1.2, $M_n(K)$ là vành đơn. Tuy nhiên, điều này có thể suy ra từ Định lý 2.1. Thật vậy, theo Ví dụ 2.1(i), ta có $M_n(K) \cong L_K(E)$ với E được xác định bởi

$$E^0 = \{v_1, ..., v_n\}, E^1 = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$$

và

$$s(e_i) = v_i,\ r(e_i) = v_{i+1}\ \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Theo Ví dụ 2.2(i), E chỉ có các tập di truyền và bão hòa tầm thường. Do đó, áp dụng Định lý 2.1, $M_n(K)$ là vành đơn.

(ii) Theo Ví dụ 1.5(iv) $K[x, x^{-1}]$ không là vành đơn. Tuy nhiên điều này có thể suy ra từ Định lý 2.1. Thật vậy, theo Ví dụ 2.1(ii), ta có $K[x, x^{-1}] \cong L_K(E)$ với E được xác định bởi

$$E^0 = \{v\},\ E^1 = \{e\}.$$

Rõ ràng chu trình v không có lối rẽ. Do đó, theo Định lý 2.1 $K[x, x^{-1}]$ không là vành đơn.

(iii) Đại số Leavitt $L_K(1, n)$: Ta sẽ chứng minh đại số này là đơn từ Định lý 2.1. Thật vậy, theo Ví dụ 2.1(iii), $L_K(1, n) \cong L_K(E)$ với E được xác định như sau

$$E^0 = \{v\},\ E^1 = \{e_1, ..., e_n\}.$$

Rõ ràng là mọi chu trình trong đồ thị E đều có lối rẽ và theo Ví dụ 2.2(ii) E chỉ có tập bão hòa và di truyền tầm thường. Do đó, theo Định lý 2.1, $L_K(1, n)$ là vành đơn.

(iv) Đại số Toeplitz $K\langle x, y\colon yx = 1\rangle$: Theo Ví dụ 2.1(iv), ta có $K\langle x, y\colon yx = 1\rangle \cong L_K(E)$ với E được xác định như sau

$$E^0 = \{v, w\},\ E^1 = \{e, f\}$$

và

$$s(e) = s(f) = v,\ r(e) = v,\ r(f) = w.$$

Theo Ví dụ 2.2(iii), $H = \{w\}$ là tập di truyền và bão hòa không tầm thường của E. Theo Định lý 2.1, $L_K(E)$ không là vành đơn.

Kết luận

Dựa trên bài báo của G. Abrams, G. Aranda Pino (2005) "The Leavitt path algebra of a graph, *Journal of Algebra*, (293), 319-334" ([3]), luận văn đã làm được những điều dưới đây:

- Trình bày cách xây dựng và một số tính chất cơ bản của đại số đường đi Leavitt.

- Chứng minh lại tiêu chuẩn để đại số đường đi Leavitt là đơn của G. Abrams và G. Aranda bằng các chứng minh ngắn gọn hơn. Điều này được thể hiện trong Bổ đề 2.4, 2.6 và 2.7.

Tài liệu tham khảo

[A] TÀI LIỆU TIẾNG VIỆT

[1] Nguyễn Tự Cường (2003), *Giáo trình đại số hiện đại*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Lê Tuấn Hoa (2003), *Đại số máy tính: Cơ sở Gröner*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[B] TÀI LIỆU TIẾNG ANH

[3] G. Abrams, G. Aranda Pino (2005), "The Leavitt path algebra of a graph", *Journal of Algebra*, (293), 319-334.

[4] G. Abrams (2015), "Leavitt path algebras: the first decade", *Bull. Math. Sci*, (5), 59-120.

[5] P. M. Cohn (1966), "Some remarks on the invariant basic property", *Topology*, (5), 215-228.

[6] T.Y. Lam (1999), *Lectures on Modules and Rings*, Spring- Verlag New York-Berlin.

[7] T.Y. Lam (2001), *A First Course in Noncommutive Rings*, 2nd ed, New York-Berlin.

[8] W.G. Leavitt (1962), "The module type of a ring", *Trans. Amer. Math. Soc*, (42), 113-130.

[9] W.G. Leavitt (1965), "The module type of homomophic images", *Duke Math. J*, (32), 305-311.

[10] M. Tomforde (2011), "Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring", *J. Pure Appl. Algebra*, (215), 471-484.