Mục lục

Lời cảm ơn

Những lời đầu tiên, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất tới PGS.TSKH. Bùi Công Cường. Thầy đã hết sức quan tâm, tin tưởng, động viên và hướng dẫn tôi nghiên cứu cũng như hoàn thành luận văn.

Trong suốt quá trình học tập, tôi đã được các thầy cô trong Viện Toán học Việt Nam trực tiếp giảng dạy các chuyên đề sau đại học, cũng như tạo mọi điều kiện tối đa để tôi có thể tập trung hoàn thành luận văn. Đặc biệt là các Thầy Cô trong Tổ Toán ứng dụng là những người Thầy mà tôi luôn kính trọng và biết ơn sâu sắc vì sự giảng dạy quý báu, tận tình về kiến thức chuyên môn cũng như kinh nghiệm trong cuộc sống.

Nhân đây tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Lê Tuấn Hoa, Trung tâm đào tạo Sau đại học, Tổ Toán ứng dụng Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo điều kiện cho tôi được bảo vệ luận văn thạc sĩ.

Cuối cùng nhưng không thể thiếu được, cho tôi gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã luôn yêu thương, chăm lo và động viên tôi vượt qua những khó khăn, để tôi có thể tập trung học tập và phấn đấu rèn luyện chuyên môn.

Hà Nội, năm 2015

Tác giả

Danh mục các kí hiệu, chữ viết tắt

$\varnothing$	tập rỗng
Z^+	tập các số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^2$	không gian Euclid 2 chiều
$\inf A$	cận dưới đúng của A
$x, y \in [0,1], x \wedge y$	$\min\{x, y\}$
$\sup A$	cận trên đúng của A
$x, y \in [0,1], x \vee y$	$\max\{x, y\}$
$\max A$	giá trị lớn nhất của A
$\min A$	giá trị nhỏ nhất của A
$x \in A$	phần tử x thuộc tập A
$y \notin B$	phần tử y không thuộc tập B
$\{x \in X \| x \in P\}$	tập hợp các phần tử $x \in X$ có tính chất P
$A \backslash B$	tập A trừ tập B
$f \circ g$	hàm hợp của f và g
FS	tập mờ (fuzzy set)
IFS	tập mờ trực cảm (intuitionistic fuzzy set)
IFV	giá trị mờ trực cảm (intuitionistic fuzzy value)
$F(X)$	tập các tập mờ trên X
$IFS(X)$	tập các tập mờ trực cảm trên X
$pr_1(x)$	ánh xạ chiếu lên thành phần thứ nhất của x
$pr_2(x)$	ánh xạ chiếu lên thành phần thứ hai của x
$x \|\|_{L^*} y$	x và y không so sánh được theo quan hệ $\leq_{L^*}$
$x \Uparrow_{L^*} y$	x và y so sánh được theo quan hệ $\leq_{L^*}$

Danh sách hình vẽ

Danh sách bảng

Lời giới thiệu

0.1 Khái quát về lý thuyết mờ trực cảm

Khái niệm tập mờ trực cảm được đề xuất bởi Krassimir Atanassov (1983) [12], [13] như một mở rộng của khái niệm tập mờ của Lotfi Zadeh (1965) [2], [16], nhằm tiếp cận các đối tượng ngữ nghĩa có bản chất không chính xác, nhất quán.

- Trong lý thuyết tập hợp cổ điển, chỉ có hai giá trị để đánh giá độ liên thuộc của một phần tử vào một tập: 0 (không thuộc) và 1 (thuộc).
- Như một mở rộng, lý thuyết tập mờ cho phép đánh giá quan hệ thuộc của một phần tử vào một tập theo một hàm thuộc nhận giá trị trên đoạn [0,1].
- Mở rộng hơn nữa, lý thuyết của các tập mờ trực cảm đánh giá các phần tử theo hai hàm: hàm thuộc và hàm không thuộc, nhận giá trị trên đoạn [0,1] và có tổng cũng nhận giá trị trên đoạn [0,1].

Lôgic Toán học đóng vai trò rất quan trọng trong những suy luận đời thường cũng như các suy luận khoa học. Song chiếc áo lôgic cổ điển (lôgic mệnh đề hay lôgic rõ) trở nên quá chật hẹp đối với các bài toán nảy sinh trong thực tế. Sự ra đời của lý thuyết tập mờ và lôgic mờ, sau đó là lý thuyết mờ trực cảm đã mang lại giải pháp hữu hiệu cho nhiều bài toán phức tạp. Có thể coi là mặt ứng dụng của lý thuyết tập mờ trực cảm, lôgic mờ trực cảm - một phương pháp toán học có tổ chức cao hơn lôgic mờ được phát triển để góp phần thực hiện các lập luận xấp xỉ trực cảm (suy diễn mờ trực cảm) thay vì lập luận chính xác theo lôgic cổ điển hay lập luận xấp xỉ theo lôgic mờ. Suy diễn mờ trực cảm gần gũi với suy luận tự nhiên của con người.

Một hệ thống (nhiều biến vào, một biến ra) có chứa các tập mờ trực cảm với cơ sở tri thức là các luật mờ trực cảm và các cơ chế suy diễn mờ trực cảm được gọi là một hệ mờ trực cảm.

0.2 Ý nghĩa và tính cấp thiết của nghiên cứu

Bên cạnh những kết quả đạt được trong thực tiễn và sự tiến đến hoàn chỉnh của lý thuyết mờ, lý thuyết mờ trực cảm ngày càng phát triển, được công nhận rộng rãi với tính đặc biệt hiệu quả khi xử lý những vấn đề liên quan đến đưa ra quyết định hay tổng hợp ý kiến (ủng hộ, không ủng hộ, lưỡng lự) của nhiều chuyên gia, trong y học, bầu cử, kinh doanh...

Cho đến nay, lý thuyết hệ mờ mà "trái tim" là các suy diễn mờ [2] đã mang lại cho thực tiễn một khối ứng dụng khổng lồ. Việc tiến hành mô hình hóa các hệ mờ trực cảm mà cốt lõi là các suy diễn mờ trực cảm rất cần thiết, phức tạp hơn rất nhiều so với các hệ mờ, gần đây đã có một số nghiên cứu nhất định.

Ví dụ 0.2.1. Suy diễn mờ trực cảm trong hệ mờ trực cảm "sức khỏe" (xem bảng 1):

Các luật mờ trực cảm (tri thức)	Nếu *không* *nghiện* thuốc lá *và* *đủ* dinh dưỡng *và* *chăm* thể dục thì lá phổi *tốt*.
	Nếu *hơi nghiện* thuốc lá *và* *hơi thiếu* dinh dưỡng *và* *chăm* thể dục thì lá phổi *hơi tốt*.
	...
	Nếu *nghiện nặng* thuốc lá *và* *suy* dinh dưỡng *và* *lười* thể dục thì lá phổi *viêm*.
Sự kiện	*Hoặc* *nghiện* thuốc lá *và* *thiếu* dinh dưỡng *và* *lười* thể dục.
Kết luận	Lá phổi *viêm* *hoặc* *viêm nhẹ*.

Bảng 1: Suy diễn mờ trực cảm trong hệ "sức khỏe".

Trong ví dụ 0.2.1, các cụm ngôn ngữ "*nghiện* thuốc lá", "*đủ* dinh dưỡng", "*chăm* thể dục" ... được lý thuyết mờ trực cảm tiếp cận bằng các tập mờ trực cảm. Việc mô hình hóa được các liên kết từ "*và*", "*không*", "*hoặc*" tức là việc sử dụng các toán tử lôgic mờ trực cảm tương ứng *t-chuẩn mờ trực cảm*, *phủ định mờ trực cảm*, *t-đối chuẩn mờ trực cảm* là khó hơn hẳn so với các toán tử lôgic mờ và vô cùng quan trọng trong quá trình mô hình hóa hệ mờ trực cảm.

Bởi sự quan trọng và đa dạng của các ứng dụng, lý thuyết mờ trực cảm đã và đang được thúc đẩy mạnh mẽ, thu hút được rất nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu. Có thể kể đến các kết quả như:

- Krassimir T. Atanassov (1983) đề xuất khái niệm tập mờ trực cảm.

- K.T. Atanassov (1986; 1994), De và cộng sự (2000) đã giới thiệu nhiều phép toán khác nhau trên tập các tập mờ trực cảm.

- Xu (2010; 2007), Xu và Xia (2011), Xu và Yager (2011; 2006), Zhao và cộng sự (2010) đã định nghĩa khái niệm giá trị mờ trực cảm và đưa ra lý thuyết so sánh, các phép toán cơ bản trên tập các giá trị mờ trực cảm, xây dựng và ứng dụng các phép toán tổng hợp các thông tin mờ trực cảm.

- Glad Deschrijver, Chris Cornelis và Etienne E. Kerre (2004) đã giới thiệu lý thuyết biểu diễn trên một số toán tử lôgic mờ trực cảm.

- E.P. Klement, R. Mesiar và E. Pap (2005) đã xuất bản cuốn sách "Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms" dựa trên các kết quả của nhiều nhà nghiên cứu, hệ thống chi tiết về lý thuyết mờ và lý thuyết mờ trực cảm.

- Supriya Kumar De Ranjit Biswas (1998), "Intiuitonistic Fuzzy Database", *Second Int. Conf. on IFSs*, Sofia.

- Eulalia Szmidt, Janusz Kacprzyk (2001), "Intiuitonistic Fuzzy Sets in Some Medical Applications", *Second Int. Conf. on IFSs*, Sofia.

- Bùi Công Cường đã có những nghiên cứu về lý thuyết mờ, mờ trực cảm và đưa ra khái niệm tập mờ bức tranh (picture fuzzy set) (2013), một mở rộng hơn nữa của khái niệm tập mờ trực cảm [3], [4], [6].

Ngoài ra, còn rất nhiều nghiên cứu của các tác giả khác trên thế giới và một số các tác giả trong nước.

Luận văn tập trung trình bày một số toán tử lôgic mờ trực cảm, góp phần tìm hiểu về lý thuyết mờ trực cảm, chuẩn bị cho những nghiên cứu sau này của tác giả.

0.3 Khái quát luận văn

0.3.1 Đối tượng và mục tiêu nghiên cứu

- Tác giả tập trung trình bày lý thuyết biểu diễn của một số toán tử lôgic mờ trực cảm, đưa ra một phân lớp mới cho một số toán tử mờ trực cảm dựa trên kiến thức lôgic mờ.

- Nắm vững các kiến thức cơ bản và một số kiến thức phát triển về tập mờ và lôgic mờ. Nắm vững kiến thức cơ bản về tập mờ trực cảm, các định lý và chứng minh các định lý của lý thuyết biểu diễn một số toán tử lôgic mờ trực cảm.

- Lấy ví dụ cho các khái niệm, tính chất đã nghiên cứu và tổng quan được kết quả cũng như nắm được vị trí của nghiên cứu.

- Thấy được một số vấn đề về các toán tử lôgic mờ trực cảm và một số mở rộng cần nghiên cứu trong tương lai.

0.3.2 Cấu trúc luận văn

Nội dung chính của luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Một số khái niệm của lý thuyết mờ, mờ trực cảm;

Chương 2: Một số toán tử lôgic mờ trực cảm.

Chương 1

Một số khái niệm của lý thuyết mờ, mờ trực cảm

Chương này giới thiệu về tập mờ Zadeh (1965), các toán tử lôgic mờ và tập mờ trực cảm Atanassov (1983) - một mở rộng trực tiếp của tập mờ Zadeh. Đây là những khái niệm cơ bản nhất, chuẩn bị cho những nghiên cứu sâu hơn về lý thuyết mờ và lý thuyết mờ trực cảm.

1.1 Tập mờ

Ta đã biết khái niệm tập hợp cổ điển hay tập rõ (crisp sets). Xét tập $X \neq \phi$, chẳng hạn: X là tập những học viên cao học K20 Viện Toán học. Xét A_1 là tập những học viên nữ trong lớp cao học K20 Viện Toán học, thì A_1 là tập con rõ của X. Với $x \in X$ bất kỳ, xét quan hệ thuộc của x vào A_1 ta có $x \in A_1$ hoặc $x \notin A_1$, hay ta có một biểu diễn thông qua hàm đặc trưng của A_1:

$$\chi_{A_1} : X \to \{0, 1\},$$
$$x \mapsto \chi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A_1, \\ 0 & \text{nếu } x \notin A_1. \end{cases}$$

Ta gọi X là không gian nền (tập nền). Xét tập A_2 là tập những học viên *giỏi* ngoại ngữ trong lớp cao học K20 Viện Toán học. Do không có định nghĩa cụ thể về "*giỏi*" nên tồn tại $x \in X$ mà ta không xác định được chính xác vấn đề: x có thuộc A_2 hay không? Nói cách khác, A_2 không có khái niệm rõ ràng về hàm đặc trưng như A_1. Những tập hợp như tập A_2 rất phổ biến và đóng vai trò hết sức quan trọng trong đời sống, xuất hiện ngay trong suy nghĩ tự nhiên của con người: tập *một vài* quả cam, tập những chiếc xe *mới*... Nhằm mô tả và giải quyết các bài toán liên quan đến những tập hợp này, Giáo sư Lotfi A. Zadeh[1] đã đưa ra khái niệm tập mờ (fuzzy sets) lần đầu năm 1965 [16].

Định nghĩa 1.1.1. *A là tập mờ (FS) trên không gian nền X nếu A được xác định bởi hàm:*

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\to [0,1]\,, \\ x &\mapsto \mu_A(x), \end{aligned}$$

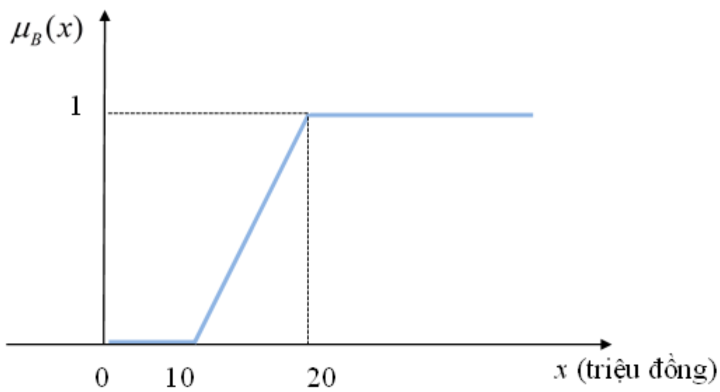
trong đó, μ_A gọi là hàm thuộc và $\mu_A(x)$ là độ thuộc của x vào tập mờ A.

Ta có thể viết $A(x)$ thay cho $\mu_A(x)$, A còn có thể được biểu diễn như sau:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \text{ hoặc } A = \{(\mu_A(x)/x) : x \in X\}.$$

Ví dụ 1.1.2. B là tập những người tỉnh Thái Bình có thu nhập cao, với hàm thuộc (hình 1.1):

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 10, \\ \frac{x-10}{10} & \text{nếu } 10 \le x \le 20, \\ 1 & \text{nếu } 20 < x. \end{cases}$$



Hình 1.1: Hàm thuộc của tập B.

[1] Khoa Kĩ thuật điện và Khoa học máy tính, trường Đại học California ở Berkeley, Hoa Kỳ.

Tập rõ cổ điển là một trường hợp riêng của tập mờ. Kí hiệu $F(X)$ là tập các tập mờ trên không gian nền X, độ thuộc $\mu_A(x)$ của x vào $A \in F(X)$ cho ta biết mức độ có tính chất A của phần tử $x \in X$.

Định nghĩa 1.1.3. *Cho $A, B \in F(X)$ với các hàm thuộc tương ứng μ_A, μ_B.*

$$A \text{ và } B \text{ bằng nhau: } A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X;$$
$$A \text{ là con } B\text{: } A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.1.4. *Cho $A, B \in F(X)$ với các hàm thuộc tương ứng μ_A, μ_B. Phép hợp $A \cup B$, phép giao $A \cap B$, phần bù A' (hay A^C) cho kết quả là các tập mờ trên X, với các hàm thuộc cho bởi:*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, \ \forall x \in X;$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, \ \forall x \in X;$$
$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \ \forall x \in X.$$

Ta coi ϕ, X là những tập mờ với $\mu_\phi(x) = 0, \mu_X(x) = 1, \forall x \in X$. Nhiều tính chất của các phép toán trên các tập rõ như giao hoán, kết hợp, phân phối, lũy đẳng, đồng nhất, hấp thu... còn đúng trên $F(X)$ và không khó để chứng minh.

1.2 Lôgic mờ

Lôgic mờ được mở rộng trực tiếp từ lôgic cổ điển. Lôgic mờ tạo cơ sở toán học vững chắc cho những suy luận gắn với các hệ thống phức tạp trong thực tế, đặc biệt là các hệ thống trí tuệ nhân tạo, các hệ thống suy luận liên quan đến ngữ nghĩa, tổng hợp tri thức của con người... Phần này giới thiệu một số công cụ chủ chốt của lôgic mờ - các liên kết lôgic cơ bản: phép phủ định mờ, phép hội mờ, phép tuyển mờ, phép kéo theo mờ [2], [7], [16].

a. Phép phủ định mờ

Định nghĩa 1.2.1. *Hàm N: $[0,1] \to [0,1]$ không tăng, thỏa mãn các điều kiện $N(0) = 1, N(1) = 0$ được gọi là một **phép phủ định mờ** (fuzzy negation). Phép phủ định N là phép phủ định chặt nếu nó là hàm liên tục và giảm chặt. Phép phủ định N là phép phủ định mạnh nếu nó là phép phủ định chặt và thỏa mãn điều kiện $N\left(N(x)\right) = x, \forall x \in [0,1]$.*

Ví dụ 1.2.2. Một số phép phủ định thường dùng (với mọi $x \in [0,1]$)

- Hàm phủ định chuẩn: $N_s(x) = 1 - x$.
- Hàm phủ định Zadeh: $N(x) = 1 - x^2$.
- Hàm phủ định Sugeno: $N_\lambda(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, $\lambda > -1$.

Nhận thấy: $N_\lambda(x)$ là những phép phủ định mạnh, bao gồm cả $N_s(x)$. Hàm $N(x) = 1 - x^2$ là chặt nhưng không mạnh.

b. Phép hội mờ (t-chuẩn)

Định nghĩa 1.2.3. *Hàm T:* $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *là một* ***t-chuẩn*** *(t-norm) hay phép hội mờ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $T(1,x) = x, \forall 0 \le x \le 1$ *(điều kiện biên).*

(ii) $T(x,y) = T(y,x), \forall 0 \le x,y \le 1$ *(giao hoán).*

(iii) $T(x,y) \le T(u,v), \forall 0 \le x \le u \le 1, 0 \le y \le v \le 1$ *(tăng).*

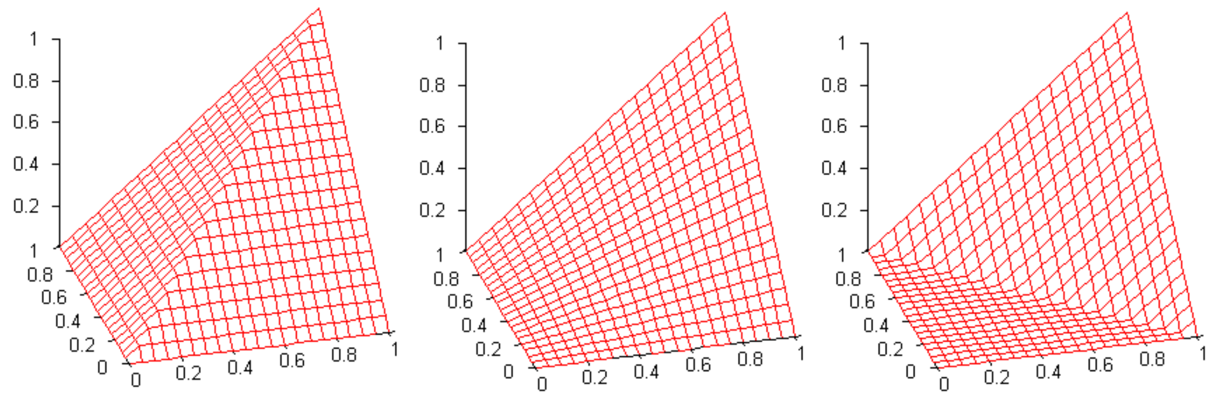
(iv) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z), \forall 0 \le x,y,z \le 1$ *(kết hợp).*

Ví dụ 1.2.4. Một số t-chuẩn thường dùng (xem hình 1.2), với mọi $x \in [0,1]$

- T-chuẩn min (Zadeh): $T_{\min}(x,y) = x \wedge y$.
- T-chuẩn Lukasiewicz: $T_{Luk}(x,y) = 0 \vee (x+y-1)$.
- T-chuẩn dạng tích: $T_{prod}(x,y) = xy$.
- $T_D(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{nếu } x \vee y = 1, \\ 0 & \text{nếu } x \vee y \neq 1. \end{cases}$.

Định nghĩa 1.2.5. *Một t-chuẩn T là Archimedean nếu và chỉ nếu T liên tục và thỏa mãn điều kiện* $T(a,a) < a, \forall a \in (0,1)$ *.*

Định nghĩa 1.2.6. *Một t-chuẩn T là lũy linh (nilpotent) nếu với mọi* $a \in (0,1)$*, tồn tại* $b \in (0,1)$ *sao cho* $T(a,b) = 0$*. Một t-chuẩn T là chặt (strict) nếu với mọi* $a \in (0,1)$*, không tồn tại* $b \in (0,1)$ *sao cho* $T(a,b) = 0$*.*



a. t-chuẩn min   b. t-chuẩn tích   c. t-chuẩn Lukasiewicz

Hình 1.2: Đồ thị một số phép t-chuẩn.

Dễ thấy: T_{Luk}, T_{prod} là các t-chuẩn Archimedean, T_{Luk} lũy linh, T_{prod} chặt.

c. Phép tuyển mờ (t-đối chuẩn)

Định nghĩa 1.2.7. *Hàm $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ là một **t-đối chuẩn** (t-conorm) hay phép tuyển mờ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $S(0,x) = x, \forall 0 \leq x \leq 1$ *(điều kiện biên).*

(ii) $S(x,y) = S(y,x), \forall 0 \leq x, y \leq 1$ *(giao hoán).*

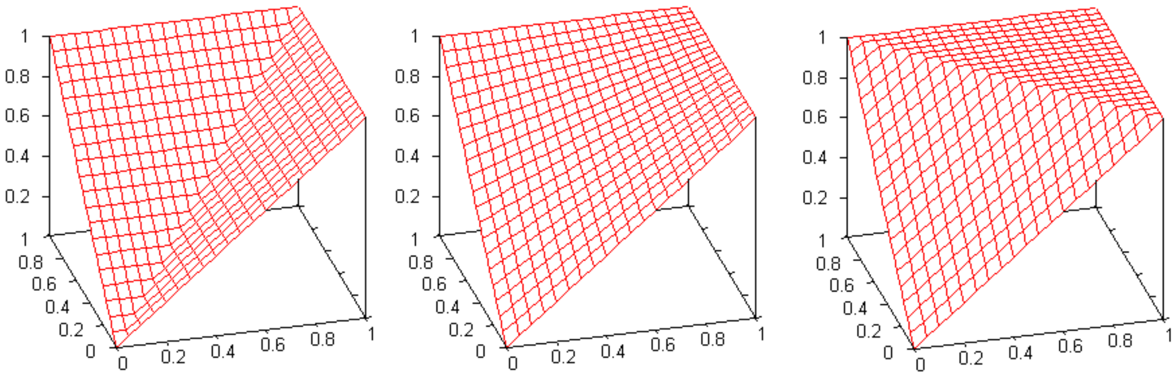
(iii) $S(x,y) \leq S(u,v), \forall 0 \leq x \leq u \leq 1, 0 \leq y \leq v \leq 1$ *(tăng).*

(iv) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z), \forall 0 \leq x,y,z \leq 1$ *(kết hợp).*

Ví dụ 1.2.8. Một số t-đối chuẩn (xem hình 1.3), với mọi $x \in [0,1]$

- T-đối chuẩn max: $S_{\max}(x,y) = \max\{x,y\}$.
- $S_{sum}(x,y) = x + y - xy$.
- $S_{Luk}(x,y) = \min\{1, x+y\}$.

Định nghĩa 1.2.9. *Một t-đối chuẩn S là Archimedean nếu và chỉ nếu S liên tục và thỏa mãn điều kiện: $S(a,a) > a, \forall a \in (0,1)$.*



a. t-đối chuẩn S_{max} b. t-đối chuẩn S_{sum} c. t-đối chuẩn S_{Luk}

Hình 1.3: Đồ thị một số phép t-đối chuẩn.

Định nghĩa 1.2.10. *Một t-đối chuẩn S là lũy linh nếu với mọi $a \in (0,1)$, tồn tại $b \in (0,1)$ sao cho $S(a,b) = 1$. Một t-đối chuẩn S là chặt nếu với mọi $a \in (0,1)$, không tồn tại $b \in (0,1)$ sao cho $S(a,b) = 1$.*

Dễ thấy: S_{Luk}, S_{sum} là các t-đối chuẩn Archimedean, S_{Luk} lũy linh, S_{sum} chặt.

d. Bộ ba DeMorgan

Định nghĩa 1.2.11. *Cho T là một t-chuẩn liên tục, S là một t-đối chuẩn liên tục, N là phép phủ định mạnh. Ta nói bộ ba (T,S,N) là* ***bộ ba De Morgan*** *nếu thỏa mãn một trong hai đẳng thức sau:*

- $S(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$.
- $T(x,y) = N(S(N(x), N(y)))$.

Khi đó T và S được gọi là đối ngẫu với nhau qua N.

e. Phép kéo theo mờ

Định nghĩa 1.2.12. *Phép kéo theo mờ là một hàm số $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) *Nếu* $0 \le x \le z \le 1$ *thì* $I(x,y) \ge I(z,y), \forall y \in [0,1]$.

(ii) *Nếu* $0 \le y \le u \le 1$ *thì* $I(x,y) \le I(x,u), \forall x \in [0,1]$.

(iii) $I(0,x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

(iv) $I(x,1) = 1, \forall x \in [0,1]$.

(v) $I(1,0) = 0$.

Một số dạng kéo theo mờ quan trọng:
Dạng kéo theo thứ nhất: Cho S là một t-đối chuẩn, N là một phủ định mạnh, dạng kéo theo thứ nhất I_S: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ được xác định như sau:

$$I_S(x,y) = S(N(x), y), \forall x, y \in [0,1].$$

Dạng kéo theo thứ hai: Cho T là một t-chuẩn, dạng kéo theo thứ hai là hàm I_T: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ được cho bởi biểu thức:

$$I_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] : T(x,z) \leq y\}, \forall x, y \in [0,1].$$

Dạng kéo theo thứ ba: Cho (T, S, N) là một bộ ba De Morgan, với N là phép phủ định mạnh, hàm I_D: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ cho bởi biểu thức sau là dạng kéo theo thứ ba:

$$I_D(x,y) = S(T(x,y), N(x)), \forall x, y \in [0,1].$$

1.3 Tập mờ trực cảm

Lý thuyết tập mờ đã chứng tỏ là một công cụ hữu ích để mô tả tình huống có dữ liệu không chính xác hay mập mờ thông qua một hàm thuộc. Tuy nhiên trong thực tế xuất hiện nhiều đối tượng mà việc mô tả chúng bằng một hàm thuộc là chưa đủ. Ví dụ khi đưa ra quyết định một vấn đề, trong y học, bầu cử, kinh doanh... đặc biệt là khi tập hợp ý kiến nhiều chuyên gia, bên cạnh việc ủng hộ còn có sự phản đối và một tỷ lệ lưỡng lự nhất định. Nhằm giải quyết hiệu quả các tình huống như vậy, Krassimir Atanassov[2] đã đề xuất khái niệm tập mờ trực cảm năm 1983, là một sự mở rộng của tập mờ Zadeh năm 1965.

[2]Viện Giải phẫu học và Kỹ thuật y sinh, Học viện Khoa học Bungary.

Định nghĩa 1.3.1. *Tập mờ trực cảm (intuitionistic fuzzy sets) A trên không gian nền $X \neq 0$ được cho bởi:*

$$A = \{\, \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \,|\, x \in X \,\}, \tag{1.1}$$

trong đó các ánh xạ $\mu_A \colon X \to [0,1]$, $\nu_A \colon X \to [0,1]$ lần lượt là hàm thuộc và hàm không thuộc thỏa mãn điều kiện:

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \, \forall x \in X, \tag{1.2}$$

ở đó $\mu_A(x), \nu_A(x)$ lần lượt là độ thuộc và độ không thuộc của x vào A.

Khi đó $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \in [0,1]$ là độ lưỡng lự của x vào A.

Ví dụ 1.3.2. Trong chuẩn đoán y khoa, các chuyên gia phân tích lâm sàng các triệu chứng của một bệnh nhân. Tất cả ý kiến các chuyên gia được tổng hợp lại cho kết quả chuẩn đoán được biểu thị bằng tập mờ trực cảm A - tập những bệnh lý có khả năng *cao* là bệnh nhân đang mắc phải.

Kí hiệu x_1 là bệnh sốt rét, x_2 là bệnh tiểu đường, x_3 là bệnh dạ dày, x_4 là bệnh tim mạch, x_5 là bệnh đại tràng. Xét trên không gian nền U - tập các bệnh lý $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, tập A có biểu diễn như sau:

$$A = \{\langle x_1, 0.6, 0.23\rangle, \langle x_2, 0, 1\rangle, \langle x_3, 0.85, 0.02\rangle, \langle x_4, 0.24, 0.67\rangle, \langle x_5, 0.5, 0.33\rangle\}.$$

Khi đó, ta có thể biểu diễn thông tin kết quả chuẩn đoán theo bảng 1.1:

Bệnh $x_i (i = \overline{1,5})$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu_A(x_i)$	0.6	0	0.85	0.24	0.5
$\nu_A(x_i)$	0.23	1	0.02	0.67	0.33
$\pi_A(x_i)$	0.17	0	0.13	0.09	0.17

Bảng 1.1: Thông tin kết quả chuẩn đoán.

Bệnh lý có độ thuộc vào A càng cao, độ không thuộc vào A càng thấp thì khả năng bệnh nhân đang mắc phải bệnh đó càng cao. Theo bảng 1.1, khả năng bệnh nhân đang mắc bệnh dạ dày là cao nhất với độ thuộc $\mu_A(x_3) = 0.85$, độ không thuộc $\nu_A(x_3) = 0.02$; khả năng bệnh nhân đang mắc bệnh tiểu đường là thấp nhất với độ thuộc $\mu_A(x_2) = 0$, độ không thuộc $\nu_A(x_2) = 1$.

Ví dụ 1.3.3. Tập ϕ, X, tập mờ A' trên X là những tập mờ trực cảm.

$$\phi = \{\langle x, 0, 1\rangle | \, x \in X\}, X = \{\langle x, 1, 0\rangle | \, x \in X\},$$

$$A' = \{\langle x, \mu_{A'}(x), 1 - \mu_{A'}(x)\rangle | \, x \in X\}, \pi_{A'}(x) = 0, \forall x \in X.$$

Ta kí hiệu $IFS(X)$ là tập các tập mờ trực cảm trên X.

Định nghĩa 1.3.4. *Cho $A, B \in IFS(X)$ với các hàm thuộc tương ứng μ_A, μ_B và hàm không thuộc tương ứng ν_A, ν_B.*

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \nu_A(x) = \nu_B(x), \forall x \in X;$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \nu_A(x) \geq \nu_B(x), \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.3.5. *Xét các tập $A, A_1, A_2 \in IFS(X)$, các toán tử sau cho kết quả cũng thuộc $IFS(X)$:*

(i) $\overline{A} = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x)\rangle \, | x \in X\}$.

(ii) $A_1 \cap A_2 = \{\langle x, \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \max\{\nu_{A_1}(x), \nu_{A_2}(x)\}\rangle | \, x \in X\}$.

(iii) $A_1 \cup A_2 = \{\langle x, \max\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \min\{\nu_{A_1}(x), \nu_{A_2}(x)\}\rangle | \, x \in X\}$.

(iv) $A_1 + A_2 = \{\langle x, \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - \mu_{A_1}(x)\mu_{A_2}(x), \nu_{A_1}(x)\nu_{A_2}(x)\rangle | \, x \in X\}$.

(v) $A_1.A_2 = \{\langle x, \mu_{A_1}(x)\mu_{A_2}(x), \nu_{A_1}(x) + \nu_{A_2}(x) - \nu_{A_1}(x)\nu_{A_2}(x)\rangle | \, x \in X\}$.

(vi) $nA = \{\langle x, 1 - (1 - \mu_A(x))^n, (\nu_A(x))^n\rangle | \, x \in X\}$, $\forall n \in Z^+$.

(vii) $A^n = \{\langle x, (\mu_A(x))^n, 1 - (1 - \nu_A(x))^n\rangle | \, x \in X\}$, $\forall n \in Z^+$.

Nhiều tính chất đối với các phép toán trên $IFS(X)$ đã được nghiên cứu và chứng minh [19].

Chương 2

Một số toán tử lôgic mờ trực cảm

Trong lý thuyết tập mờ, các phép liên kết đóng vai trò rất quan trọng, chúng được sử dụng để định nghĩa tổng quát phép toán giao, hợp của các tập mờ, từ đó góp phần xây dựng các luật thành phần trong một hệ thống suy diễn. Chương này trình bày những khái niệm mở rộng và khái quát lý thuyết biểu diễn của những phép liên kết trong trường hợp mờ trực cảm [8], [9].

Để thuận lợi Xu (2007) gọi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ là một giá trị mờ trực cảm (intuitionistic fuzzy value) (IFV), ở đó

$$\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1] : \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1. \tag{2.1}$$

Ta kí hiệu L^* là tập các giá trị mờ trực cảm. Ta có thể đồng nhất $\alpha \in L^*$ với thông tin của x trên tập $A \in IFS\,(X)$ với $\mu_A(x) = \alpha_1, \nu_A(x) = \alpha_2$.

Goguen (1967) đã định nghĩa một tập L-mờ trên X như là một ánh xạ $X \to L$, là một tổng quát hóa của khái niệm tập mờ [11]. Tập mờ là trường hợp riêng của tập L-mờ khi L = [0,1], ở đây L là một dàn đầy đủ được trang bị một phép toán thỏa mãn những điều kiện nhất định.

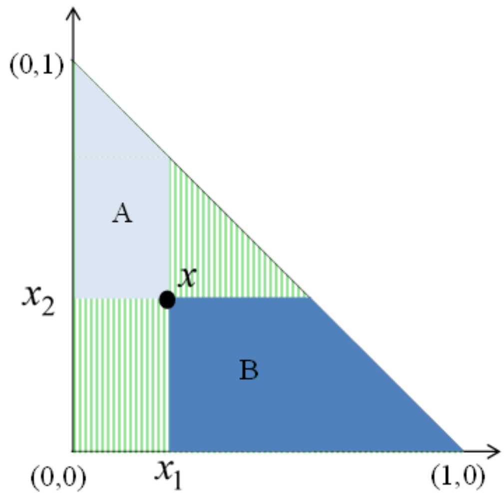
Deschrijver và Kerre (2003) định nghĩa một dàn đầy đủ như là một tập sắp thứ tự một phần $(L, \leq_L)$ sao cho mọi tập con khác rỗng của L đều có một giá trị supremum và một giá trị infimum trong L. Họ đã chỉ ra rằng những tập mờ trực cảm $A \in IFS(X)$ được xem như là những tập L^*-mờ trên X, có thể viết: $A(x) = (\mu_A(x), \nu_A(x))\,, \forall x \in X$, ở đó dàn $(L^*, \leq_{L^*})$ được định nghĩa như sau:

$$L^* = \{(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in [0,1]^2, x_1 + x_2 \leq 1\},$$
$$(x_1, x_2) \leq_{L^*} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \geq y_2, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^*.$$

Khi đó, với mọi tập $\phi \neq A \subseteq L^*$, ta có:

$$\begin{aligned}\sup A = (&\sup\{x_1|x_1 \in [0,1], (\exists x_2 \in [0, 1-x_1])((x_1, x_2) \in A)\},\\ &\inf\{x_2|x_2 \in [0,1], (\exists x_1 \in [0, 1-x_2])((x_1, x_2) \in A\}),\\ \inf A = (&\inf\{x_1|x_1 \in [0,1], (\exists x_2 \in [0, 1-x_1])((x_1, x_2) \in A)\},\\ &\sup\{x_2|x_2 \in [0,1], (\exists x_1 \in [0, 1-x_2])((x_1, x_2) \in A\}).\end{aligned}$$

Như vậy $(L^*, \leq_{L^*})$ (hình 2.1) là một dàn đầy đủ [8], [9].



Hình 2.1: Dàn L^*, $A = \{y \in L^* | y \leq_{L^*} x\}$, $B = \{y \in L^* | y \geq_{L^*} x\}$.

Từ đây trở đi, ta luôn giả sử rằng $x \in L^* \Rightarrow x = (x_1, x_2)$ và kí hiệu:

- Các phần tử trung hòa của dàn L^*: $0_{L^*} = (0, 1); 1_{L^*} = (1, 0)$.
- Tập $D = \{x | x \in L^*, x_1 + x_2 = 1\}$.
- $pr_1(x) = x_1$; $pr_2(x) = x_2, \forall x \in L^*$.
- $x||_{L^*}y$: x và y không so sánh được theo quan hệ $\leq_{L^*}$.
- $x \Uparrow_{L^*} y$: x và y so sánh được theo quan hệ $\leq_{L^*}$.

Ta xem những tập mờ trực cảm $A \in IFS(X)$ như những tập L^*-mờ trên X, khi đó những tính chất đúng với các phép toán trên dàn L^* thì cũng đúng với các phép toán tương ứng được xác định theo từng điểm (pointwise operations) trên $IFS(X)$ [15].

2.1 Phép phủ định mờ trực cảm

Định nghĩa 2.1.1. *Một phủ định mờ trực cảm $\mathcal{N}$ là một ánh xạ không tăng bất kỳ $\mathcal{N}$: $L^* \to L^*$ thỏa mãn $\mathcal{N}(0_{L^*}) = 1_{L^*}$ và $\mathcal{N}(1_{L^*}) = 0_{L^*}$. $\mathcal{N}$ được gọi là cuộn nếu $\mathcal{N}$ thỏa mãn $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x, \forall x \in L^*$.*

Ví dụ 2.1.2. Ánh xạ $\mathcal{N}_S$ được cho bởi $\mathcal{N}_S(x) = (x_2, x_1), \forall x \in L^*$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn và được gọi là phủ định chuẩn trên L^*.

Mệnh đề 2.1.3. *Nếu $\mathcal{N}$ là phủ định mờ trực cảm cuộn thì $\mathcal{N}(0,0) = (0,0)$.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{N}$ là phủ định mờ trực cảm cuộn và $\mathcal{N}(0,0) \neq (0,0)$, khi đó $\mathcal{N}(0,0) \in \{(a,0),(0,b),(a,b)|a,b>0\}$.

Giả sử $\mathcal{N}(0,0) = (a,0), a > 0$. Chọn $y, y' \in L^*|y, y' \leq_{L^*} (a,0), y||_{L^*}y'$. Do $\mathcal{N}$ cuộn và giảm nên $\mathcal{N}(y)$, $\mathcal{N}(y') \geq_{L^*} \mathcal{N}(a,0) = (0,0)$. Khi đó $\mathcal{N}(y)$, $\mathcal{N}(y')$ có dạng $(c,0)$, $c \geq 0$ nên $\mathcal{N}(y) \Uparrow_{L^*} \mathcal{N}(y')$ suy ra $y \Uparrow_{L^*} y'$, mâu thuẫn với cách chọn $y||_{L^*}y'$.

Do đó $\mathcal{N}(0,0) \neq (a,0), a > 0$. Tương tự ta có $\mathcal{N}(0,0) \neq (0,b)$, $\mathcal{N}(0,0) \neq (a,b)$ với $a, b > 0$. Vậy $\mathcal{N}(0,0) = (0,0)$. □

Hệ quả 2.1.4. *Nếu $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn, thì*

$$pr_2\mathcal{N}(0,a) = 0; pr_1\mathcal{N}(a,0) = 0, \forall a \in [0,1].$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{N}$ là phủ định mờ trực cảm cuộn. Do $(0,a) \leq_{L^*} (0,0)$ và $\mathcal{N}$ là giảm nên $\mathcal{N}(0,a) \geq_{L^*} \mathcal{N}(0,0) = (0,0)$. Suy ra $pr_2\mathcal{N}(0,a) \leq pr_2\mathcal{N}(0,0) = 0$.

Do đó $pr_2\mathcal{N}(0,a) = 0$. Tương tự ta có $pr_1\mathcal{N}(a,0) = 0, \forall a \in [0,1]$. □

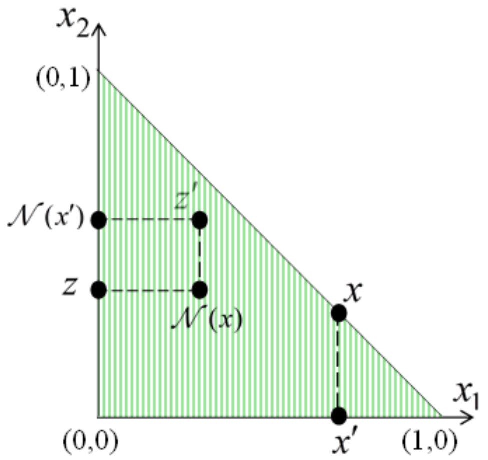
Mệnh đề 2.1.5. *Nếu $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn, thì:*

$$pr_2\mathcal{N}(x_1, 1-x_1) = pr_2\mathcal{N}(x_1, 0);$$
$$pr_1\mathcal{N}(1-x_1, x_1) = pr_1\mathcal{N}(0, x_1), \forall x_1 \in [0,1].$$

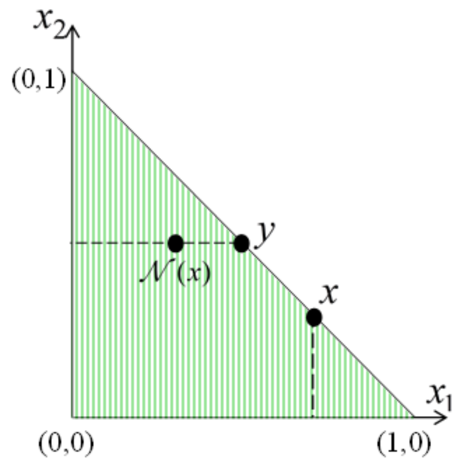
Chứng minh. Giả sử $\mathcal{N}$ là phủ định mờ trực cảm cuộn. Mệnh đề hiển nhiên đúng với $x_1 = 1$. Bây giờ giả sử $x_1 \in [0,1)$.

Xét $x = (x_1, 1-x_1)$ và $x' = (x_1, 0)$ và giả sử $pr_2\mathcal{N}(x) < pr_2\mathcal{N}(x')$. Từ Hệ quả 2.1.4, ta có $pr_1\mathcal{N}(x') = 0, pr_1\mathcal{N}(x) > 0$ (xem hình 2.2).

Với $z = (0, pr_2\mathcal{N}(x))$, $z' = (\min(pr_1\mathcal{N}(x), 1 - pr_2\mathcal{N}(x')), pr_2\mathcal{N}(x'))$ thì $z||_{L^*}z'$.



Hình 2.2: Minh họa chứng minh Mệnh đề 2.1.5.



Hình 2.3: Minh họa chứng minh Mệnh đề 2.1.7.

Ta kiểm tra được $\mathcal{N}(x') <_{L*} z <_{L*} \mathcal{N}(x)$ và $\mathcal{N}(x') <_{L*} z' <_{L*} \mathcal{N}(x)$ và do $\mathcal{N}$ là giảm nên $pr_1\mathcal{N}(z) = pr_1\mathcal{N}(z') = x_1$ suy ra $\mathcal{N}(z) \Uparrow_{L*} \mathcal{N}(z')$, dẫn đến $z \Uparrow_{L^*} z'$, mâu thuẫn với cách lấy $z||_{L^*} z'$. Do vậy $pr_2\mathcal{N}(x) = pr_2\mathcal{N}(x')$.

Chứng minh tương tự ta có $pr_1\mathcal{N}(1 - x_1, x_1) = pr_1\mathcal{N}(0, x_1), \forall x_1 \in [0, 1]$. □

Hệ quả 2.1.6. *Nếu $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn, thì:*

$$pr_2\mathcal{N}(x) = pr_2\mathcal{N}(x_1, 1 - x_1) = pr_2\mathcal{N}(x_1, 0);$$
$$pr_1\mathcal{N}(x) = pr_1\mathcal{N}(1 - x_2, x_2) = pr_1\mathcal{N}(0, x_2), \forall x \in L^*.$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{N}$ là phủ định mờ trực cảm cuộn. Với mọi $x \in L^*$ ta có:

$$(x_1, 1 - x_1) \leq_{L^*} x \leq_{L^*} (x_1, 0) \Rightarrow \mathcal{N}(x_1, 1 - x_1) \geq_{L^*} \mathcal{N}(x) \geq_{L^*} \mathcal{N}(x_1, 0)$$
$$\Rightarrow pr_2\mathcal{N}(x_1, 1 - x_1) \leq pr_2\mathcal{N}(x) \leq pr_2\mathcal{N}(x_1, 0).$$

Từ Mệnh đề 2.1.5, ta có $pr_2\mathcal{N}(x_1, 1 - x_1) = pr_2\mathcal{N}(x_1, 0)$. Do đó

$$pr_2\mathcal{N}(x) = pr_2\mathcal{N}(x_1, 1 - x_1) = pr_2\mathcal{N}(x_1, 0).$$

Tương tự, ta có $pr_1\mathcal{N}(x) = pr_1\mathcal{N}(1 - x_2, x_2) = pr_1\mathcal{N}(0, x_2)$. □

Mệnh đề 2.1.7. *Nếu $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn, thì $\mathcal{N}(D) = D$.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn và tồn tại $x \in D$ sao cho $\mathcal{N}(x) \notin D$. Xét $y = (1 - pr_2\mathcal{N}(x), pr_2\mathcal{N}(x)) \in D$ (xem hình 2.3).

Ta có $y >_{L^*} \mathcal{N}(x)$ và do $\mathcal{N}$ là giảm nên $\mathcal{N}(y) \leq_{L^*} x$, theo Hệ quả 2.1.6 ta có

$pr_1\mathcal{N}(y) = pr_1\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x_1$ suy ra $pr_2\mathcal{N}(y) = 1 - x_1, \mathcal{N}(y) = x$ và do $\mathcal{N}$ là cuộn nên $\mathcal{N}(x) = y$, mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{N}(x) \notin D$. Do đó $\mathcal{N}(D) \subseteq D$.

Lại do $\mathcal{N}$ là cuộn, nên $\mathcal{N}(D) = D$. □

Định lý 2.1.8. *Giả sử $\mathcal{N}$ là phủ định mờ trực cảm cuộn, định nghĩa ánh xạ*

$$N\colon [0,1] \to [0,1],\ N(a) = pr_1\mathcal{N}(a, 1-a),$$

thì N là phủ định cuộn trên $[0,1]$ và

$$\mathcal{N}(x) = (N(1-x_2), 1 - N(x_1)), x \in L^*. \tag{2.2}$$

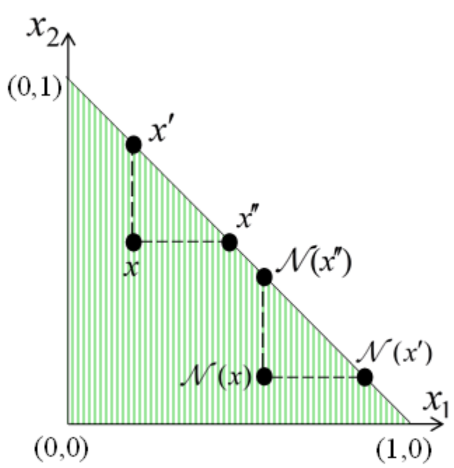
Ngược lại, nếu N là một phủ định mờ cuộn, thì ánh xạ $\mathcal{N}\colon L^* \to L^*$, xác định bởi (2.2) là một phủ định mờ trực cảm cuộn.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn và ánh xạ

$$N\colon [0,1] \to [0,1],\ N(a) = pr_1\mathcal{N}(a, 1-a).$$

Khi đó $N(0) = pr_1\mathcal{N}(0,1) = 1, N(1) = pr_1\mathcal{N}(1,0) = 0$. Với $a, b \in [0,1]$ sao cho $a \leq b$ thì $(a, 1-a) \leq_{L^*} (b, 1-b)$ và do $\mathcal{N}$ là giảm nên $\mathcal{N}(a, 1-a) \geq_{L^*} \mathcal{N}(b, 1-b)$ suy ra $N(a) \geq N(b)$. Ta có $pr_2\mathcal{N}(a, 1-a) = 1 - N(a)$ (do $\mathcal{N}(D) = D$, theo Mệnh đề 2.1.7) nên $N(N(a)) = pr_1\mathcal{N}(N(a), 1 - N(a)) = pr_1\mathcal{N}(\mathcal{N}(a, 1-a)) = a$.

Vậy N là một phủ định mờ cuộn.



Hình 2.4: Minh họa chứng minh Định lý 2.1.8.

Với $x \in L^*$ bất kỳ, đặt $x' = (x_1, 1 - x_1), x'' = (1 - x_2, x_2)$ (hình 2.4). Từ Hệ quả 2.1.6, Mệnh đề 2.1.7 và định nghĩa ánh xạ N ta có:

$$pr_1\mathcal{N}(x) = pr_1\mathcal{N}(x'') = N(1-x_2);$$
$$pr_2\mathcal{N}(x) = pr_2\mathcal{N}(x') = 1 - pr_1\mathcal{N}(x') = 1 - N(x_1).$$

Bây giờ giả sử N là phủ định mờ cuộn và $\mathcal{N}$ được định nghĩa bởi (2.2), ta chứng minh $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn, thật vậy:

- Với $x, x' \in L^*|x' \geq_{L^*} x$, thì $(N(1-x_2), 1-N(x_1)) \geq_{L^*} (N(1-x_2'), 1-N(x_1'))$ suy ra $\mathcal{N}(x) \geq_{L^*} \mathcal{N}(x')$.
- $\mathcal{N}(0_{L^*}) = (N(1-1), 1-N(0)) = 1_{L^*}, \mathcal{N}(1_{L^*}) = 0_{L^*}$.
- $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = (N(N(x_1)), 1-N(N(1-x_2))) = x$.

Ví dụ 2.1.9. Từ Định lý 2.1.8, nếu $N = N_S$, ta thu được phủ định chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{N}_S$.

2.2 T-chuẩn và t-đối chuẩn mờ trực cảm

2.2.1 Các khái niệm

Sử dụng dàn $(L^*, \leq_{L^*})$ và mở rộng trực tiếp t-chuẩn, t-đối chuẩn sang trường hợp mờ trực cảm, ta có những định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.2.1. *Một t-chuẩn mờ trực cảm là một ánh xạ $\mathcal{T}$: $(L^*)^2 - L^*$ thỏa mãn những điều kiện sau:*

(i) $\mathcal{T}(x, 1_{L^*}) = x, \forall x \in L^*$ *(điều kiện biên).*

(ii) $\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}(y, x), \forall x, y \in L^*$ *(giao hoán).*

(iii) $\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), z), \forall x, y, z \in L^*$ *(kết hợp).*

(iv) $\mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} \mathcal{T}(x', y'), \forall x, x', y, y' \in L^*|x \leq_{L^*} x', y \leq_{L^*} y'$ *(tăng).*

Định nghĩa 2.2.2. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm là một ánh xạ $\mathcal{S}$: $(L^*)^2 - L^*$ thỏa mãn những điều kiện sau:*

(i) $\mathcal{S}(x, 0_{L^*}) = x, \forall x \in L^*$ *(điều kiện biên).*

(ii) $\mathcal{S}(x, y) = \mathcal{S}(y, x), \forall x, y \in L^*$ *(giao hoán).*

(iii) $\mathcal{S}(x, \mathcal{S}(y, z)) = \mathcal{S}(\mathcal{S}(x, y), z), \forall x, y, z \in L^*$ *(kết hợp).*

(iv) $\mathcal{S}(x, y) \leq_{L^*} \mathcal{S}(x', y'), \forall x, x', y, y' \in L^* | x \leq_{L^*} x', y \leq_{L^*} y'$ *(tăng).*

Ví dụ 2.2.3. [8] Một số t-chuẩn và t-đối chuẩn mờ trực cảm, với mọi $x, y \in L^*$:

- $\mathcal{T}(x, y) = (\min(x_1, y_1), \max(x_2, y_2))$.
- $\mathcal{T}(x, y) = (x_1 y_1, x_2 + y_2 - x_2 y_2)$.
- $\mathcal{T}(x, y) = (\max(0, x_1 + y_1 - 1), \min(1, x_2 + y_2))$.
- T-chuẩn mờ trực cảm Lukasiewicz:
$$\mathcal{T}_W(x, y) = (\max(0, x_1 + y_1 - 1), \min(1, x_2 + 1 - y_1, y_2 + 1 - x_1)).$$
- $\mathcal{S}(x, y) = (\max(x_1, y_1), \min(x_2, y_2))$.
- $\mathcal{S}_W(x, y) = (\min(1, 1 - x_2 + y_1, 1 - y_2 + x_1), 1 - \min(1, 1 - x_2 + 1 - y_2))$.

Cho $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ lần lượt là t-chuẩn, t-đối chuẩn mờ trực cảm. Phép giao, phép hợp của hai tập mờ trực cảm A, B được xác định theo $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ như sau:

$$A \cap_{\mathcal{T}} B(u) = \mathcal{T}(A(u), B(u)), \forall u \in U;$$
$$A \cup_{\mathcal{S}} B(u) = \mathcal{S}(A(u), B(u)), \forall u \in U.$$

Bổ đề 2.2.4. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm, $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm, $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm, định nghĩa:*

$$\mathcal{T}^*(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y))), \forall x, y \in L^*;$$
$$\mathcal{S}^*(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{S}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y))), \forall x, y \in L^*.$$

Khi đó $\mathcal{T}^*, \mathcal{S}^*$ lần lượt là t-đối chuẩn mờ trực cảm, t-chuẩn mờ trực cảm, tương ứng được gọi là đối ngẫu của $\mathcal{T}$ qua $\mathcal{N}$, đối ngẫu của $\mathcal{S}$ qua $\mathcal{N}$.

Chứng minh. Ta chứng minh $\mathcal{T}^*$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm. Thật vậy:

- Ta có $\mathcal{T}^*(x, 0_{L^*}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(0_{L^*}))) = \mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$.
- $\mathcal{T}^*(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y))) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(y), \mathcal{N}(x))) = \mathcal{T}^*(y, x)$.
- Do $\mathcal{T}$ kết hợp nên ta có:
$$\begin{aligned}\mathcal{T}^*(x, \mathcal{T}^*(y, z)) &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{T}(\mathcal{N}(y), \mathcal{N}(z))))\\ &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)), \mathcal{N}(z)))\\ &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(\mathcal{T}^*(x, y)), \mathcal{N}(z))) = \mathcal{T}^*(\mathcal{T}^*(x, y), z).\end{aligned}$$

- Với $x, x', y, y' \in L^*$ sao cho $x \leq_{L^*} x', y \leq_{L^*} y'$, do $\mathcal{N}$ giảm và $\mathcal{T}$ tăng nên $\mathcal{N}(x) \geq_{L^*} \mathcal{N}(x'), \mathcal{N}(y) \geq_{L^*} \mathcal{N}(y')$ và $\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)) \geq_{L^*} \mathcal{T}(\mathcal{N}(x'), \mathcal{N}(y'))$. Do đó $\mathcal{T}^*(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y))) \leq_{L^*} \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x'), \mathcal{N}(y'))) = \mathcal{T}^*(x', y')$.

Vậy $\mathcal{T}^*$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm. Tương tự, $\mathcal{S}^*$ là t-chuẩn mờ trực cảm. □

Ví dụ 2.2.5. Một số cặp toán tử đối ngẫu (xem bảng 2.1).

$\mathcal{T}(x, y)$	$\mathcal{S}(x, y)$
$(\min(x_1, y_1), \max(x_2, y_2))$	$(\max(x_1, y_1), \min(x_2, y_2))$
$(x_1y_1, x_2 + y_2 - x_2y_2)$	$(x_1 + y_1 - x_1y_1, x_2y_2)$
$(\max(0, x_1 + y_1 - 1), \min(1, x_2 + y_2))$	$(\min(1, x_1 + y_1), \max(0, x_2 + y_2 - 1))$
$\mathcal{T}_W(x, y)$	$\mathcal{S}_W(x, y)$

Bảng 2.1: Một số cặp toán tử $\mathcal{T}(x, y)$ và $\mathcal{S}(x, y)$ đối ngẫu qua $\mathcal{N}_S$.

Bổ đề 2.2.6. *Cho T là một t-chuẩn, S là một t-đối chuẩn, t-chuẩn đối ngẫu S^* của S cho bởi $S^*(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y), \forall x, y \in [0, 1]$. Nếu $T \leq S^*$, tức là $T(x, y) \leq S^*(x, y), \forall x, y \in [0, 1]$, định nghĩa:*

$$\mathcal{T}(x, y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)), \forall x, y \in L^*;$$
$$\mathcal{S}(x, y) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)), \forall x, y \in L^*,$$

thì $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ lần lượt là t-chuẩn mờ trực cảm, t-đối chuẩn mờ trực cảm.

Chứng minh. Với mọi $x, y, z, x', y' \in L^*$ ta có:

- $$\begin{aligned} T(x_1, y_1) + S(x_2, y_2) &\leq S^*(x_1, y_1) + S(x_2, y_2) \\ &= 1 - S(1 - x_1, 1 - y_1) + S(x_2, y_2) \\ &\leq 1 - S(1 - x_1, 1 - y_1) + S(1 - x_1, 1 - y_1) = 1. \end{aligned}$$

- $\mathcal{T}(x, 1_{L^*}) = (T(x_1, 1), S(x_2, 0)) = (x_1, x_2) = x$.

- $\mathcal{T}(x, y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)) = (T(y_1, x_1), S(y_2, x_2)) = \mathcal{T}(y, x)$.

- $$\begin{aligned} \mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z)) &= (T(x_1, T(y_1, z_1)), S(x_2, S(y_2, z_2))) \\ &= (T(T(x_1, y_1), z_1), S(S(x_2, y_2), z_2)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), z). \end{aligned}$$

- Với $x' \geq_{L^*} x,\ \ y' \geq_{L^*} y$, thì $T(x_1, y_1) \leq T(x'_1, y'_1)$, $S(x_2, y_2) \geq S(x'_2, y'_2)$ nên $(T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)) \leq_{L^*} (T(x'_1, y'_1), S(x'_2, y'_2))$ hay $\mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} \mathcal{T}(x', y')$.

Vậy $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm. Tương tự, $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm. □

Định nghĩa 2.2.7. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn T và một t-đối chuẩn S trên $[0,1]$ thỏa mãn:*

$$\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*. \tag{2.3}$$

Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn T và một t-đối chuẩn S trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$$\mathcal{S}(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*. \tag{2.4}$$

Ta thấy ở Ví dụ 2.2.3, T_W không phải t-biểu diễn được, các t-chuẩn và t-đối chuẩn còn lại là t-biểu diễn được.

Định lý 2.2.8. *T-đối chuẩn mờ trực cảm đối ngẫu qua một phủ định mờ trực cảm cuộn $\mathcal{N}$ trên L^* của một t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được là t-biểu diễn được. T-chuẩn mờ trực cảm đối ngẫu qua một phủ định mờ trực cảm cuộn $\mathcal{N}$ trên L^* của một t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được là t-biểu diễn được.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được, tức là tồn tại một t-chuẩn T và một t-đối chuẩn S trên [0,1] thỏa mãn:

$$\forall x,y \in L^*, \mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)).$$

Từ Định lý 2.1.8 với $\mathcal{N}$ là một phủ định mờ trực cảm cuộn bất kỳ trên L^*, tồn tại phủ định cuộn N trên [0,1] sao cho:

$$\mathcal{N}(x) = (N(1-x_2), 1-N(x_1)).$$

Ta có: $\mathcal{T}^*(x,y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(x),\mathcal{N}(y)))$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}(\mathcal{T}((N(1-x_2),1-N(x_1)),(N(1-y_2),1-N(y_1))))\\
&= \mathcal{N}(T(N(1-x_2),N(1-y_2)),S(1-N(x_1),1-N(y_1)))\\
&= (N(1-S(1-N(x_1),1-N(y_1))),1-N(T(N(1-x_2),N(1-y_2)))).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ta có thể chứng minh rằng $N(1-S(1-N(x_1),1-N(y_1)))$ là một t-đối chuẩn và $1-N(T(N(1-x_2),N(1-y_2)))$ là một t-chuẩn. Do vậy, $\mathcal{T}^*$ là t-biểu diễn được, phần còn lại của định lý được chứng minh tương tự.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}^*(x,y) = \mathcal{N}(\mathcal{S}(\mathcal{N}(x),\mathcal{N}(y)))\\
&= (N(1-T(1-N(x_1),1-N(y_1))),1-N(S(N(1-x_2),N(1-y_2)))).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Chú ý rằng: $\mathcal{N}$ là giảm chặt nếu và chỉ nếu N là giảm chặt. $\square$

Định nghĩa 2.2.9. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là Archimedean nếu và chỉ nếu* $\forall x \in L^*\backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}, \mathcal{T}(x, x) <_{L^*} x$.

Định nghĩa 2.2.10. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là:*

- *lũy linh nếu và chỉ nếu* $\exists x, y \in L^*\backslash\{0_{L^*}\}, \mathcal{T}(x, y) = 0_{L^*}$.
- *chặt nếu và chỉ nếu* $\forall x, y \in L^*\backslash\{0_{L^*}\}, \mathcal{T}(x, y) \neq 0_{L^*}$.

Định nghĩa 2.2.11. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là Archimedean nếu và chỉ nếu* $\forall x \in L^*\backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}, \mathcal{S}(x, x) >_{L^*} x$.

Định nghĩa 2.2.12. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là:*

- *lũy linh nếu và chỉ nếu* $\exists x, y \in L^*\backslash\{1_{L^*}\}, \mathcal{S}(x, y) = 1_{L^*}$.
- *chặt nếu và chỉ nếu* $\forall x, y \in L^*\backslash\{1_{L^*}\}, \mathcal{S}(x, y) \neq 1_{L^*}$.

Định lý 2.2.13. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được, với mọi* $x, y \in L^*, \mathcal{T}(x, y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2))$ *và giả sử T, S là Archimdean. Khi đó, $\mathcal{T}$ cũng là Archimedean.*

Chứng minh. Ta có: $\forall x \in L^*\backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}, \mathcal{T}(x, x) = (T(x_1, x_1), S(x_2, x_2))$. Do T và S là Archimdean nên $T(x_1, x_1) < x_1, S(x_2, x_2) > x_2$, kéo theo $\mathcal{T}(x, x) <_{L^*} x$. $\square$

Tương tự Định lý 2.2.13, ta có định lý sau.

Định lý 2.2.14. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được: với mọi* $x, y \in L^*, \mathcal{S}(x, y) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2))$ *và giả sử T, S là Archimdean. Khi đó, $\mathcal{S}$ cũng là Archimedean.*

2.2.2 Một số lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được

Dựa vào tính lũy linh, chặt của các t-chuẩn mờ và t-đối chuẩn mờ, ta có thể định nghĩa được ba lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được như sau [5]:

1. Lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được chặt-chặt (Δ_{ss}).

Định nghĩa 2.2.15. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là t-biểu diễn được chặt-chặt nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn chặt T và một t-đối chuẩn chặt S trên $[0,1]$ sao cho: $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$.*

Ví dụ 2.2.16. $\mathcal{T} \in \Delta_{ss}$, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathcal{T}(x,y) = (x_1y_1, x_2 + y_2 - x_2y_2).$$

2. Lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được lũy linh-lũy linh (Δ_{nn}).

Định nghĩa 2.2.17. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là t-biểu diễn được lũy linh-lũy linh nếu và chỉ nếu tồn tại t-chuẩn lũy linh T và t-đối chuẩn lũy linh S trên $[0,1]$ sao cho: $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$.*

Ví dụ 2.2.18. $\mathcal{T} \in \Delta_{nn}$:

$$\mathcal{T}(x,y) = (\max(0, x_1 + y_1 - 1), \min(1, x_2 + y_2)), \forall x,y \in L^*.$$

3. Lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được lũy linh-chặt (Δ_{ns}).

Định nghĩa 2.2.19. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là t-biểu diễn được lũy linh-chặt nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh T và một t-đối chuẩn chặt S trên $[0,1]$ sao cho: $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$.*

Ví dụ 2.2.20. Một số $\mathcal{T} \in \Delta_{ns}$:

- $\mathcal{T}(x,y) = (\max(0, x_1 + y_1 - 1), x_2 + y_2 - x_2y_2), \forall x,y \in L^*$.
  Ta có: $x_1 + y_1 - 1 + x_2 + y_2 - x_2y_2 = x_1 + y_1 - (1 - x_2)(1 - y_2)$
  $\leq x_1 + y_1 - x_1y_1 = 1 - (1 - x_1)(1 - y_1) \leq 1.$
- $\mathcal{T}(x,y) = \left(\max\left\{\frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 1 + x_1y_1), 0\right\}, x_2 + y_2 - x_2y_2\right), \forall x,y \in L^*$.
  Ta có: $\frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 1 + x_1y_1) + x_2 + y_2 - x_2y_2$
  $= \frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 1 + x_1y_1) + 1 - (1 - x_2)(1 - y_2)$
  $\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 - x_1y_1) = 1 - \frac{1}{2}(1 - x_1)(1 - y_1) \leq 1.$
  $T(x_1,y_1) = \max\left\{\frac{1}{2}(x_1 + y_1 - 1 + x_1y_1), 0\right\}, \forall\, x_1, y_1 \in [0,1]$ là t-chuẩn lũy linh do $T(0.1, 0.2) = 0$.

Mệnh đề 2.2.21. *Không tồn tại t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được $\mathcal{T}$ sao cho $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$ với T là t-chuẩn chặt và S là t-đối chuẩn lũy linh.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$ với T là t-chuẩn chặt và $\exists x_2', y_2' \in (0,1)$ sao cho $S(x_2', y_2') = 1$.

Chọn $x_1 \neq 0$ sao cho $x_1 + x_2' \leq 1$ và $y_1 \neq 0$ sao cho $y_1 + y_2' \leq 1$, do T chặt nên ta có $T(x_1,y_1) > 0$. Với $\overline{x} = (x_1, x_2')$, $\overline{y} = (y_1, y_2')$, ta xét $\mathcal{T}(\overline{x}, \overline{y})$ ta có $T(x_1,y_1) + S(x_2', y_2') > 1$, mâu thuẫn với $\mathcal{T}(\overline{x}, \overline{y}) \in L^*$. □

Mệnh đề 2.2.22. *Nếu $\mathcal{T} \in \Delta_{ss}$ hoặc $\mathcal{T} \in \Delta_{ns}$, thì $\mathcal{T}$ là chặt.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T} \in \Delta_{ns}$, $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$ và tồn tại $x', y' \in L^* \backslash \{0_{L^*}\}$ sao cho $\mathcal{T}(x', y') = 0_{L^*}$.

Ta có $T(x_1', y_1') = 0,\ S(x_2', y_2') = 1$, do S chặt nên $x_2' = 1$ hoặc $y_2' = 1$, mâu thuẫn với cách chọn x', y'. Vậy $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm chặt.

Tương tự, $\mathcal{T} \in \Delta_{ss}$ là t-chuẩn mờ trực cảm chặt. □

Mệnh đề 2.2.23. *Nếu $\mathcal{T} \in \Delta_{nn}$, thì $\mathcal{T}$ là lũy linh.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T} \in \Delta_{nn}$ và $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$.

Do T lũy linh nên $\exists u, v \neq 0$ sao cho $T(u,v) = 0$ và T không giảm nên $\forall u' \leq u, v' \leq v$, $T(u',v') = 0$. Do S lũy linh nên $\exists a, b \neq 1$ sao cho $S(a,b) = 1$.

Chọn $x = (u', a)$ sao cho $u' + a \leq 1$ và $y = (v', b)$ sao cho $v' + b \leq 1$ ta có $\mathcal{T}(x,y) = (T(u',v'), S(a,b)) = (0,1) = 0_{L^*}$ và $\mathcal{T}$ là lũy linh. □

2.2.3 Một số lớp t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được

Tương tự t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được, ta phân biệt các lớp sau:

1. Lớp ∇_{ss} các t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được chặt-chặt.

Định nghĩa 2.2.24. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là t-biểu diễn được chặt-chặt nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn chặt T và một t-đối chuẩn chặt S trên $[0,1]$ sao cho: $\mathcal{S}(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$.*

Ví dụ 2.2.25. $\mathcal{S} \in \nabla_{ss}$, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathcal{S}(x,y) = (x_1 + y_1 - x_1 y_1, x_2 y_2).$$

2. Lớp ∇_{nn} các t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được lũy linh-lũy linh.

Định nghĩa 2.2.26. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là t-biểu diễn được lũy linh-lũy linh nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh T và một t-đối chuẩn lũy linh S trên $[0,1]$ sao cho: $\mathcal{S}(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$.*

Ví dụ 2.2.27. $\mathcal{S} \in \nabla_{nn}$:

$$\mathcal{S}(x,y) = (\min(1, x_1+y_1), \max(0, x_2+y_2-1)), \forall x,y \in L^*.$$

3. Lớp ∇_{sn} t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được chặt-lũy linh.

Định nghĩa 2.2.28. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là t-biểu diễn được lũy linh-chặt nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh T và một t-đối chuẩn chặt S trên $[0,1]$ sao cho: $\mathcal{S}(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2))$, $\forall x,y \in L^*$.*

Ví dụ 2.2.29. Một số $\mathcal{S} \in \nabla_{sn}$, với mọi $x,y \in L^*$:

- $\mathcal{S}(x,y) = (x_1+y_1-x_1y_1, \max(0, x_2+y_2-1))$.
- $\mathcal{S}(x,y) = \left(x_1+y_1-x_1y_1, \max\left\{\frac{1}{2}(x_2+y_2-1+x_2y_2), 0\right\}\right)$.

Tương tự như phần 2.2.2, những mệnh đề sau được chứng minh.

Mệnh đề 2.2.30. *Không tồn tại t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được $\mathcal{S}$ sao cho $\mathcal{S}(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2)), \forall x,y \in L^*$ với T là t-chuẩn chặt và S là t-đối chuẩn lũy linh.*

Mệnh đề 2.2.31. *Nếu $\mathcal{S} \in \nabla_{ss}$ hoặc $\mathcal{S} \in \nabla_{sn}$, thì $\mathcal{S}$ là chặt.*

Mệnh đề 2.2.32. *Nếu $\mathcal{S} \in \nabla_{nn}$, thì $\mathcal{S}$ là lũy linh.*

Định lý 2.2.33. *Hai lớp trong mỗi cặp: (Δ_{ss}, ∇_{ss}); (Δ_{nn}, ∇_{nn}); (Δ_{ns}, ∇_{sn}) đối ngẫu với nhau, tức là đối ngẫu qua một phủ định mờ trực cảm cuộn, giảm chặt của một phần tử của lớp này thuộc vào lớp còn lại.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T} \in \Delta_{nn}$, $\mathcal{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2))$, từ (2.5) ta có:

$$\mathcal{T}^*(x,y) = (N(1-S(1-N(x_1), 1-N(y_1))), 1-N(T(N(1-x_2), N(1-y_2)))).$$

Do S lũy linh nên tồn tại $a,b \in (0,1)$ sao cho $S(a,b)=1$ kéo theo tồn tại $x_1,y_1 \in (0,1)$ sao cho $a = 1-N(x_1), b = 1-N(y_1)$ và $S(1-N(x_1), 1-N(y_1)) = 1$ suy ra $pr_1\mathcal{T}^*(x,y)$ là một t-đối chuẩn lũy linh.

Do T lũy linh nên tồn tại $c, d \in (0,1)$ sao cho $T(c,d) = 0$ kéo theo tồn tại $x_2, y_2 \in (0,1)$ để $c = 1-N(x_2), d = 1-N(y_2)$ và $1-N(T(N(1-x_2), N(1-y_2))) = 0$ suy ra $pr_2\mathcal{T}^*(x,y)$ là một t-chuẩn lũy linh.

Vậy $\mathcal{T}^*(x,y) \in \nabla_{nn}$. Tương tự, nếu $\mathcal{S} \in \nabla_{nn}$ thì $\mathcal{S}^* \in \Delta_{nn}$.

Bây giờ giả sử $\mathcal{T} \in \Delta_{ss}$, do S là chặt nên với mọi $a, b \in (0,1)$ ta có $S(a,b) < 1$ kéo theo với mọi $x_1, y_1 \in (0,1)$ ta có $S(1-N(x_1), 1-N(y_1)) < 1$. Do $\mathcal{N}$ giảm chặt nên $N(1-S(1-N(x_1), 1-N(y_1))) < 1, \forall x_1, y_1 \in (0,1)$ nên $pr_1\mathcal{T}^*(x,y)$ là t-đối chuẩn chặt. Tương tự, $pr_2\mathcal{T}^*(x,y)$ là t-chuẩn chặt.

Vậy $\mathcal{T}^*(x,y) \in \nabla_{ss}$. Tương tự, nếu $\mathcal{S} \in \nabla_{ss}$ thì $\mathcal{S}^* \in \Delta_{ss}$. Chứng minh tương tự ta có Δ_{ns}, ∇_{sn} đối ngẫu với nhau.

2.3 Lý thuyết biểu diễn các t-chuẩn, t-đối chuẩn mờ trực cảm

2.3.1 Song ánh liên tục, tăng trên L^*

Ta cần định nghĩa hàm khoảng cách (metric) d trên L^*, tức là một ánh xạ $L^* \times L^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in L^*$.
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in L^*$.
- $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in L^*$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x, y, z \in L^*$.

Với mọi $x, y \in L^*$, $x_\pi = 1 - x_1 - x_2, y_\pi = 1 - y_1 - y_2$ ta đưa ra bốn hàm khoảng cách trên L^* như sau:

- Khoảng cách Euclidean: $d^E(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.
- Khoảng cách Hamming: $d^H(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.
- Khoảng cách Euclidean mờ trực cảm [8]:

$$d^E_{L^*}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_\pi - y_\pi)^2}.$$

- Khoảng cách Hamming mờ trực cảm [8]:

$$d^H_{L^*}(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_\pi - y_\pi|.$$

Ta có định nghĩa tính liên tục trên (L^*, d) như trên một không gian metric bất kỳ và $d^E, d^H, d^E_{L^*}, d^H_{L^*}$ là tương đương tôpô trên L^* [8].

Định nghĩa 2.3.1. *Cho ánh xạ $F : L^* \to L^*$ tùy ý và $a \in L^*$, khi đó*

- *F được gọi là liên tục-trái mờ trực cảm tại a nếu và chỉ nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0, \forall x \in L^* : a_1 - \delta_1 < x_1 \leq a_1,\ a_2 \leq x_2 < a_2 + \delta_2$$
$$\Rightarrow d(F(x), F(a)) < \varepsilon.$$

- *F được gọi là liên tục-phải mờ trực cảm tại a nếu và chỉ nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0, \forall x \in L^* : a_1 \leq x_1 < a_1 + \delta_1,\ a_2 - \delta_2 < x_2 \leq a_2$$
$$\Rightarrow d(F(x), F(a)) < \varepsilon.$$

- *F liên tục-trái (tương ứng, liên tục-phải) mờ trực cảm nếu và chỉ nếu F là liên tục-trái (tương ứng, liên tục-phải) mờ trực cảm tại mọi điểm của L^*.*

Bổ đề 2.3.2. *Nếu Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng, thì*

$$\Phi(0,0) = (0,0).$$

Chứng minh. Giả sử Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^*. Khi đó tồn tại ánh xạ Φ^{-1}, giả sử Φ^{-1} tăng.

Giả sử $\Phi(0,0) \neq (0,0)$. Khi đó $\Phi(0,0) \in \{(a,0), (b,0), (a,b) \in L^* | \, a, b \neq 0\}$. Ta lần lượt xét các trường hợp sau:

(i) Xét $\Phi(0,0) = (a,0)$ với $a > 0$. Giả sử $z, t <_{L^*} (a,0)$ sao cho $z ||_{L^*} t$ (chẳng hạn $z = (c,d) \in L^*, t = (e,f) \in L^*$ với $a > c > e, d > f > 0$). Do Φ là toàn ánh nên tồn tại $j, k \in L^*$ sao cho $\Phi(j) = z, \Phi(k) = t$. Do Φ^{-1} tăng và $\Phi(j), \Phi(k) <_{L^*} \Phi(0,0)$ nên $j, k \leq_{L^*} (0,0)$. Từ $j, k \leq_{L^*} (0,0)$ suy ra $pr_1(j) = pr_1(k) = 0$ hay j, k có dạng $(0,m)$ dẫn đến $j \Uparrow_{L^*} k$ và do Φ tăng nên $\Phi(j) \Uparrow_{L^*} \Phi(k)$, mâu thuẫn với giả thiết $z ||_{L^*} t$.

(ii) Xét $\Phi(0,0) = (0,b)$ với $b > 0$. Tương tự trường hợp (i), chọn $z, t >_{L^*} (0,b)$, $z||_{L^*}t$. Tồn tại $j, k \in L^*$ sao cho $\Phi(j) = z, \Phi(k) = t$. Do Φ^{-1} tăng và $\Phi(j), \Phi(k) >_{L^*} \Phi(0,0)$ nên $j, k \geq_{L^*} (0,0)$ suy ra j, k có dạng $(m, 0)$ dẫn đến $j \Uparrow_{L^*} k$, mâu thuẫn với cách chọn $z||_{L^*}t$.

(iii) Xét $\Phi(0,0) = (a,b)$ với $a, b > 0$. Tương tự trường hợp (i), chọn $z, t >_{L^*} (a,b)$ sao cho $z||_{L^*}t$. Tồn tại $j, k \in L^*$ sao cho $\Phi(j) = z, \Phi(k) = t$ và $j, k \geq_{L^*} (0,0)$ suy ra j, k có dạng $(m, 0)$ dẫn đến $j \Uparrow_{L^*} k$, mâu thuẫn với cách chọn $z||_{L^*}t$.

Trong cả 3 trường hợp ta đều nhận được mâu thuẫn nên giả thiết $\Phi(0,0) \neq (0,0)$ là sai. Vậy $\Phi(0,0) = (0,0)$. □

Hệ quả 2.3.3. *Nếu Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng, thì*

$$\forall a \in [0,1] : pr_2\Phi(a,0) = 0; pr_1\Phi(0,a) = 0.$$

Chứng minh. Giả sử $a \in [0,1]$, ta có $(a,0) \geq_{L*} (0,0)$. Do Φ tăng và do Bổ đề 2.3.2 ta thu được $\Phi(a,0) \geq_{L*} \Phi(0,0) = (0,0)$. Do đó $pr_2\Phi(a,0) = 0$.

Tương tự, ta có $pr_1\Phi(0,a) = 0$. □

Bổ đề 2.3.4. *Nếu Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng, thì*

$$\forall a_1 \in [0,1]\text{: } pr_1\Phi(a_1, 1-a_1) = pr_1\Phi(a_1, 0);\ pr_2\Phi(1-a_1, a_1) = pr_2\Phi(0, a_1).$$

Chứng minh. Giả sử Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng.

Trước tiên, ta chứng minh $pr_1\Phi(a_1, 1-a_1) = pr_1\Phi(a_1, 0), \forall a_1 \in [0,1]$, đẳng thức hiển nhiên đúng với $a_1 = 1$, nên ta giả sử $a_1 \in [0,1)$.

Đặt $\Phi(a_1, 1-a_1) = b$. Nếu $b_2 = 0$ thì $\Phi(a_1, 1-a_1) = (b_1, 0)$. Theo Bổ đề 2.3.2, ta lại có $\Phi(0,0) = (0,0)$. Do $(0,0) \Uparrow_{L^*} (b_1, 0)$ nhưng $(0,0) ||_{L^*} (a_1, 1-a_1)$, mâu thuẫn với Φ^{-1} tăng. Do đó $b_2 \neq 0$.

Từ Hệ quả 2.3.3 ta có $\Phi(a_1, 0) = (m, 0) \in L^*$. Ta phải chứng minh $b_1 = m$.

Ta có $b_1 \leq m$, giả sử $b_1 < m$. Xét $z = (z_1, 0)$ với $b_1 < z_1 < m$. Do Φ là toàn ánh và Φ^{-1} tăng nên tồn tại $t = (t_1, 0) \in L^*$ sao cho $\Phi(t) = z$. Do $(z_1, 0) <_{L^*} (m, 0)$ và Φ là song ánh, Φ^{-1} tăng nên $t_1 < a_1$. Khi đó $t ||_{L^*} (a_1, 1-a_1)$ nhưng $z >_{L^*} b$, mâu thuẫn với Φ^{-1} tăng. Do đó $b_1 = m$.

Vậy $pr_1\Phi(a_1, 1-a_1) = pr_1\Phi(a_1, 0), \forall a_1 \in [0,1]$. Chứng minh tương tự ta được $pr_2\Phi(1-a_1, a_1) = pr_2\Phi(0, a_1), \forall a_1 \in [0,1]$. □

Hệ quả 2.3.5. *Nếu Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng, thì*

$$pr_1\Phi(a) = pr_1\Phi(a_1, 1-a_1) = pr_1\Phi(a_1, 0),$$
$$pr_2\Phi(a) = pr_2\Phi(1-a_2, a_2) = pr_2\Phi(0, a_2), \forall a \in L^*.$$

Chứng minh. Với mọi $a \in L^*$ ta có:

$$\begin{aligned}
&(a_1, 0) \geq_{L^*} a \geq_{L^*} (a_1, 1-a_1) \\
&\Rightarrow \Phi(a_1, 0) \geq_{L^*} \Phi(a) \geq_{L^*} \Phi(a_1, 1-a_1) \\
&\Rightarrow pr_1\Phi(a_1, 0) \geq_{L^*} pr_1\Phi(a) \geq_{L^*} pr_1\Phi(a_1, 1-a_1).
\end{aligned}$$

Từ đó, với Bổ đề 2.3.4, ta có $pr_1\Phi(a) = pr_1\Phi(a_1, 1-a_1) = pr_1\Phi(a_1, 0)$. Chứng minh tương tự ta có $pr_2\Phi(a) = pr_2\Phi(1-a_2, a_2) = pr_2\Phi(0, a_2)$. □

Bổ đề 2.3.6. *Nếu Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng, thì*

$$\Phi(D) = D.$$

Chứng minh. Giả sử Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng và tồn tại $x \in D$ sao cho $x' = \Phi(x) \notin D$. Theo Hệ quả 2.3.5 và Hệ quả 2.3.3 ta có

$$\begin{aligned}
pr_1\Phi(y) = x_1' &\Leftrightarrow pr_1\Phi(y_1, 0) = pr_1\Phi(x_1, 0) \\
\Leftrightarrow \Phi(y_1, 0) = \Phi(x_1, 0) &\Leftrightarrow (y_1, 0) = (x_1, 0) \Leftrightarrow y_1 = x_1, \forall y \in L^*.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Do Φ là toàn ánh nên tồn tại $z \in L^*$ sao cho $(x_1', 1-x_1') = \Phi(z)$, do (2.7) ta có $z_1 = x_1$ (xem hình 2.5). Khi đó $z_2 \leq 1 - x_1$ và $x \leq_{L^*} z$ kéo theo $x' \leq_{L^*} (x_1', 1-x_1')$ do Φ tăng. Ta lại có $x' \notin D$ suy ra $(x_1', 1-x_1') <_{L^*} x'$ (mâu thuẫn). Vậy với mọi $x \in D$ thì $\Phi(x) \in D$ hay $\Phi(D) \subseteq D$.

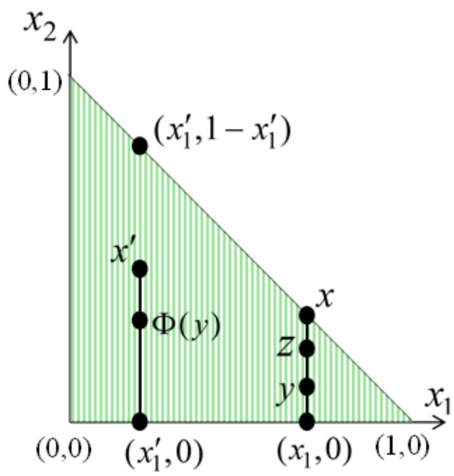
Bây giờ ta chứng minh $D \subseteq \Phi(D)$. Thật vậy, giả sử $x \in D$, do Φ là toàn ánh nên tồn tại $z \in L^*$ sao cho $x = \Phi(z)$. Xét $z' = (z_1, 1-z_1) \in D$, ta có $\Phi(z') \in D$ do $\Phi(D) \subseteq D$. Ta lại có $pr_1\Phi(z') = pr_1\Phi(z) = x_1$. Do đó $x = \Phi(z') \in \Phi(D)$.

Vậy $\Phi(D) = D$. □

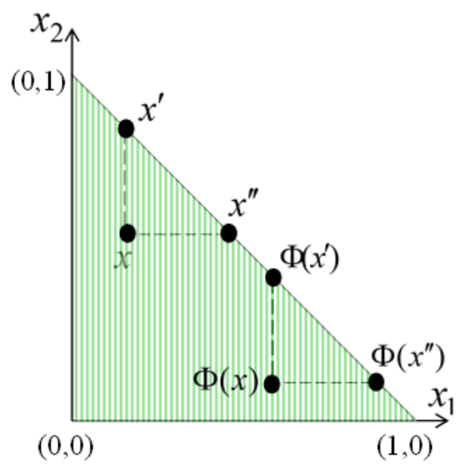
Định lý 2.3.7. *Nếu Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng, thì tồn tại một song ánh liên tục, tăng φ trên $[0,1]$ sao cho:*

$$\Phi(x) = (\varphi(x_1), 1 - \varphi(1-x_2)), x \in L^*. \tag{2.8}$$

Ngược lại, với song ánh liên tục, tăng bất kỳ φ trên $[0,1]$, ánh xạ được xác định bởi công thức (2.8) là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng.



Hình 2.5: Minh họa chứng minh Bổ đề 2.3.6.



Hình 2.6: Minh họa chứng minh Định lý 2.3.7.

Chứng minh. Giả sử Φ là một song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng và giả sử $x \in L^*$, $x' = (x_1, 1 - x_1), x'' = (1 - x_2, x_2)$ (xem hình 2.6).

Ta xét hàm φ: $[0, 1] \to [0, 1]$ cho bởi $\varphi(a) = pr_1\Phi(a, 1 - a)$. Ta có φ là đơn ánh do với mọi $a, b \in [0, 1]$ ta có $\varphi(a) \neq \varphi(b) \Leftrightarrow \Phi(a, 1 - a) \neq \Phi(b, 1 - b)$ (do $\Phi(D) = D$) $\Leftrightarrow a \neq b$ (do Φ là song ánh). φ là toàn ánh do $\Phi(D) = D$. φ tăng do Φ tăng. $\varphi = pr_1 \circ \Phi \circ (id_{[0,1]}, N_S)$ (kí hiệu $id_{[0,1]}$ là hàm đồng nhất trên $[0, 1]$) liên tục (do các hàm hàm hợp thành là liên tục).

Vậy φ là song ánh tăng, liên tục trên $[0, 1]$. Hơn nữa, do $\Phi(D) = D$ và theo Hệ quả 2.3.5 ta có

$$pr_1\Phi(x) = pr_1\Phi(x') = \varphi(x_1),$$
$$pr_2\Phi(x) = pr_2\Phi(x'') = 1 - pr_1\Phi(x'') = 1 - \varphi(1 - x_2).$$

Bây giờ, giả sử φ là song ánh liên tục tăng trên $[0, 1]$, hàm Φ: $L^* \to L^*$ xác định bởi $\Phi(x) = (\varphi(x_1), 1 - \varphi(1 - x_2))$. Ta có Φ đơn ánh do với mọi $x, y \in L^*$ ta có $\Phi(x) \neq \Phi(y) \Leftrightarrow (\varphi(x_1), 1 - \varphi(1 - x_2)) \neq (\varphi(y_1), 1 - \varphi(1 - y_2)) \Leftrightarrow x_1 \neq y_1$ hoặc $x_2 \neq y_2$ (do φ là đơn ánh) $\Leftrightarrow x \neq y$. Do φ là toàn ánh nên với mọi $y \in L^*$ tồn tại $x_1, x_2 \in [0, 1]$ sao cho $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = 1 - \varphi(1 - x_2)$, khi đó với $x = (x_1, x_2)$ ta có $\Phi(x) = y$ nên Φ là toàn ánh trên L^*. Φ và Φ^{-1} tăng do φ tăng. Φ liên tục do φ liên tục.

Vậy Φ là song ánh liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng. $\square$

2.3.2 Nguyên tắc residuation cho t-chuẩn mờ trực cảm

Trước tiên, ta mở rộng khái niệm phép kéo theo cho trường hợp mờ trực cảm.

Định nghĩa 2.3.8. *Phép kéo theo mờ trực cảm là một ánh xạ $\mathcal{I}$: $(L^*)^2 \to L^*$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

- $\mathcal{I}(0_{L^*}, 0_{L^*}) = 1_{L^*}$, $\mathcal{I}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$, $\mathcal{I}(1_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$, $\mathcal{I}(1_{L^*}, 0_{L^*}) = 0_{L^*}$.
- $\forall x, x' \in L^*, x \leq_{L^*} x' \Rightarrow \mathcal{I}(x, y) \geq_{L^*} \mathcal{I}(x', y), \forall y \in L^*$.
- $\forall y, y' \in L^*, y \leq_{L^*} y' \Rightarrow \mathcal{I}(x, y) \leq_{L^*} \mathcal{I}(x, y'), \forall x \in L^*$.

Định nghĩa 2.3.9. *Cho t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$, phép kéo theo $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y) =$ $\sup\{\gamma \in L^* | \mathcal{T}(x, \gamma) \leq_{L^*} y\}$, $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation nếu và chỉ nếu*

$$\forall x, y, z \in L^* : \mathcal{T}(x, z) \leq_{L^*} y \Leftrightarrow z \leq_{L^*} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y). \tag{2.9}$$

Định nghĩa 2.3.10. *Giả sử $\phi \neq A \subseteq L^*$ và $a \in L^*$. Khi đó $a = \sup A$ nếu và chỉ nếu $\forall x \in A, x \leq_{L^*} a, \forall \varepsilon_1 > 0, \exists z \in A | z_1 > a_1 - \varepsilon_1, \forall \varepsilon_2 > 0, \exists z \in A | z_2 < a_2 + \varepsilon_2$.*

Điều này tương đương với:

$$a = \sup A \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq_{L^*} a, \varepsilon > 0, \exists z, z' \in A | z_1 > a_1 - \varepsilon, z'_2 < a_2 + \varepsilon. \tag{2.10}$$

Định nghĩa 2.3.11. *Giả sử $\phi \neq A \subseteq L^*$ và $a \in L^*$. Khi đó $a = \inf A$ nếu và chỉ nếu $\forall x \in A, x \geq_{L^*} a, \forall \varepsilon_1 > 0, \exists z \in A | z_1 < a_1 + \varepsilon_1, \forall \varepsilon_2 > 0, \exists z \in A | z_2 > a_2 - \varepsilon_2$.*

Định lý 2.3.12. *Ánh xạ tăng f: $L^* \to L^*$ liên tục-trái mờ trực cảm nếu*

$$\sup f(Z) = f(\sup Z), \forall \phi \neq Z \subseteq L^*. \tag{2.11}$$

Chứng minh. Giả sử f: $L^* \to L^*$ là một ánh xạ tăng thỏa mãn (2.11) và $z^* \in L^*$. Xét $Z = \{z \in L^* | z_1 < z_1^*, z_2 > z_2^*\}$, khi đó $z^* = \sup Z$ và $\sup\limits_{z \in Z} f(z) = f(z^*)$. Theo (2.10), với mọi $z \in Z, f(z) \leq_{L^*} f(z^*)$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $z', z'' \in Z$ sao cho

$$pr_1 f(z') > pr_1 f(z^*) - (\varepsilon/2), \ pr_2 f(z'') < pr_2 f(z^*) + (\varepsilon/2).$$

Do $z', z'' \in Z$ nên $\sup(z', z'') \in Z$. Do f tăng nên

$$pr_1 f(z^*) \geq pr_1 f(\sup(z', z'')) \geq pr_1 f(z') > pr_1 f(z^*) - (\varepsilon/2);$$
$$pr_2 f(z^*) \leq pr_2 f(\sup(z', z'')) \leq pr_2 f(z'') < pr_2 f(z^*) + (\varepsilon/2).$$

Với $\delta_1 = |z_1^* - \max(z_1', z_1'')|$ và $\delta_2 = |z_2^* - \min(z_2', z_2'')|$ ta có với mọi $z \in L^*$ thỏa mãn $z_1^* - \delta_1 < z_1 \leq z_1^*,\ z_2^* \leq z_2 < z_2^* + \delta_2$ thì $z >_{L^*} \sup(z', z'')$. Do f tăng kéo theo $f(\sup(z', z'')) \leq_{L^*} f(z) \leq_{L^*} f(z^*)$. Do đó

$$pr_1 f(z^*) \geq pr_1 f(z) > pr_1 f(z^*) - (\varepsilon/2);$$
$$pr_2 f(z^*) \leq pr_2 f(x) < pr_2 f(z^*) + (\varepsilon/2).$$

Vậy $|pr_1 f(z) - pr_1 f(z^*)| + |pr_2 f(z) - pr_2 f(z^*)| < \varepsilon$, f liên tục-trái mờ trực cảm. □

Định lý 2.3.13. [8] *Ánh xạ tăng $f\colon L^* \to L^*$ liên tục-phải mờ trực cảm nếu*

$$\inf f(Z) = f(\inf Z), \forall \phi \neq Z \subseteq L^*.$$

Định lý 2.3.14. *Giả sử $f\colon L^* \to L^*$ là một ánh xạ tăng bất kỳ sao cho $pr_1 f(x)$ độc lập với x_2 và $pr_2 f(x)$ độc lập với x_1. Nếu f là liên tục-trái mờ trực cảm thì*

$$\sup f(Z) = f(\sup Z), \forall \phi \neq Z \subseteq L^*.$$

Chứng minh. Giả sử $f\colon L^* \to L^*$, $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ tăng và liên tục-trái mờ trực cảm. Khi đó với $Z \subseteq L^*, z^* = \sup Z$, $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta_1, \delta_2 > 0$ sao cho

$$\forall z \in L^* | z_1^* - \delta_1 < z_1 \leq z_1^*,\ z_2^* \leq z_2 < z_2^* + \delta_2$$
$$\Rightarrow |f_1(z_1) - f_1(z_1^*)| + |f_2(z_2) - f_2(z_2^*)| < \varepsilon.$$

Từ Định lý 2.3.10 ta có: $\exists z', z'' \in Z | z_1^* \geq z_1' > z_1^* - \delta_1, z_2^* \leq z_2'' < z_2^* + \delta_2$.

Do $z', z'' \leq_{L^*} z^*$ nên $\sup(z', z'') \leq_{L^*} z^*$. Do đó

$$z_1^* \geq \max(z_1', z_1'') \geq z_1' > z_1^* - \delta_1; z_2^* \leq \min(z_2', z_2'') \leq z_2'' < z_2^* + \delta_2.$$

Khi đó $|f_1(\max(z_1', z_1'')) - f_1(z_1^*)| + |f_2(\min(z_2', z_2'')) - f_2(z_2^*)| < \varepsilon$.

Do f tăng nên $f_1(\max(z_1', z_1'')) > f_1(z_1^*) - \varepsilon$; $f_2(\min(z_2', z_2'')) < f_2(z_2^*) + \varepsilon$.

Kết hợp Định lý 2.3.10, ta có $\sup\limits_{z \in Z} f(z) = f(z^*) = f(\sup Z)$. □

Định lý 2.3.15. [8] *Cho $f\colon L^* \to L^*$ là ánh xạ tăng sao cho $pr_1 f(x)$ độc lập với x_2 và $pr_2 f(x)$ độc lập với x_1. Nếu f liên tục-phải mờ trực cảm thì*

$$\inf f(Z) = f(\inf Z), \forall \phi \neq Z \subseteq L^*.$$

Định lý 2.3.16. *T-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation nếu và chỉ nếu với $x \in L^*$ bất kỳ và tập con Z khác rỗng bất kỳ của L^* thì*

$$\sup_{z \in Z} \mathcal{T}(x, z) = \mathcal{T}(x, \sup_{z \in Z} z). \tag{2.12}$$

Chứng minh. Với $x \in L^*$, $\phi \neq Z \subseteq L^*$ bất kỳ. Giả sử $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation, $y = \sup_{z\in Z} \mathcal{T}(x,z)$, $z^* = \sup Z$. Ta có $\forall z \in Z, \mathcal{T}(x,z) \leq_{L^*} y$ nên

$$\Rightarrow \forall z \in Z, z \in \{\gamma \in L^* | \mathcal{T}(x,\gamma) \leq_{L^*} y\} \Rightarrow Z \subseteq \{\gamma \in L^* | \mathcal{T}(x,\gamma) \leq_{L^*} y\}$$

$$\Rightarrow z^* = \sup Z \leq_{L^*} \sup\{\gamma \in L^* | \mathcal{T}(x,\gamma) \leq_{L^*} y\} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,y).$$

Do $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation nên $\mathcal{T}(x, \sup Z) = \mathcal{T}(x, z^*) \leq_{L^*} y = \sup_{z\in Z} \mathcal{T}(x,z)$. Hơn nữa, do $\mathcal{T}(x,.)$ tăng nên $\forall z \in Z, \mathcal{T}(x,z) \leq_{L^*} \mathcal{T}(x, \sup Z)$. Do đó, ta nhận được đẳng thức (2.12).

Bây giờ, giả sử $\mathcal{T}$ thỏa mãn (2.12). Nếu $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,y) \geq_{L^*} z$ thì

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x,z) \leq_{L^*} \mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,y)) &= \mathcal{T}(x, \sup\{\gamma | \gamma \in L^*, \mathcal{T}(x,\gamma) \leq_{L^*} y\}) \\ &= \sup\{\mathcal{T}(x,\gamma) | \gamma \in L^*, \mathcal{T}(x,\gamma) \leq_{L^*} y\} \ \leq_{L^*} y.\end{aligned}$$

Nếu $\mathcal{T}(x,z) \leq_{L^*} y$ suy ra $z \in \{\gamma \in L^*, \mathcal{T}(x,\gamma) \leq_{L^*} y\}$ nên $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,y) \geq_{L^*} z$. Do đó $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation. □

Định lý 2.3.17. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được. Khi đó các ánh xạ thành phần của $\mathcal{T}$ là liên tục-trái mờ trực cảm nếu và chỉ nếu $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation, khi đó bởi Định lý 2.3.12 và 2.3.16 ta có $\mathcal{T}$ liên tục-trái mờ trực cảm.

Bây giờ giả sử $\mathcal{T}(x,.), \mathcal{T}(.,y)$ là liên tục-trái mờ trực cảm. Ta có $\forall x \in L^*$: $pr_1\mathcal{T}(x,y) = T(x_1,y_1)$ độc lập với y_2 và $pr_2\mathcal{T}(x,y) = S(x_2,y_2)$ độc lập với y_1. Từ Định lý 2.3.14 ta có $\sup_{z\in Z} \mathcal{T}(x,z) = \mathcal{T}(x, \sup_{z\in Z} z), \forall Z \subseteq L^*$, kết hợp Định lý 2.3.16, dẫn đến $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation. □

Nói chung, từ tính liên tục-trái mờ trực cảm không thể suy ra một t-chuẩn mờ trực cảm thỏa mãn nguyên tắc residuation. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.3.18. Ánh xạ $\mathcal{T} : (L^*)^2 \to L^*$ sau là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục nhưng không thỏa mãn nguyên tắc residuation.

$$\mathcal{T}(x,y) = (\max(0, x_1 + y_1 - \tfrac{1}{2}x_2y_2 - 1), \min(1, x_2 + y_2)), \forall x, y \in L^*.$$

Chứng minh. Ta có $\mathcal{T}(x, 1_{L^*}) = x$, $\mathcal{T}$ tăng, liên tục. $\mathcal{T}$ kết hợp, thật vậy:
$\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y,z)) = (\max(0, x_1 + \max(0, y_1 + z_1 - \tfrac{1}{2}y_2z_2 - 1) - \tfrac{1}{2}x_2 \min(1, y_2 + z_2) - 1),$

$$\min(1, x_2 + \min(1, y_2 + z_2)))$$

$$= (\max(0, x_1 + y_1 + z_1 - \tfrac{1}{2}y_2z_2 - 1 - \tfrac{1}{2}x_2 \min(1, y_2 + z_2) - 1),$$

$$\min(1, x_2 + y_2 + z_2)).$$

- Nếu $y_2+z_2 \geq 1$ suy ra $y_1+z_1 \leq 1$. Khi đó $x_1+y_1+z_1-2-\frac{1}{2}y_2z_2-\frac{1}{2}x_2 < 0$, và $\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z)) = (0, \min(1, x_2 + y_2 + z_2)) = \mathcal{T}(y, \mathcal{T}(x, z))$.
- Nếu $y_2 + z_2 \leq 1$ ta có $\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z))$ và $\mathcal{T}(y, \mathcal{T}(x, z)$ bằng nhau và bằng

$$(\max(0, x_1 + y_1 + z_1 - \tfrac{1}{2}y_2z_2 - 1 - \tfrac{1}{2}x_2y_2 - \tfrac{1}{2}x_2z_2 - 1), \min(1, x_2 + y_2 + z_2)).$$

Bây giờ ta chỉ ra $\mathcal{T}$ không thỏa mãn nguyên tắc residuation, thật vậy:

$$\mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} z \Leftrightarrow \{x_1 + y_1 - \tfrac{1}{2}x_2y_2 - 1 \leq z_1,\ x_2 + y_2 \geq z_2\}$$
$$\Leftrightarrow \{y_1 \leq \tfrac{1}{2}x_2y_2 + z_1 - x_1 + 1,\ y_2 \geq z_2 - x_2, y_1 + y_2 \leq 1\}.$$

Đường thẳng (d_1): $y_1 = \frac{1}{2}x_2y_2 + z_1 - x_1 + 1$ cắt đường thẳng $y_2 = z_2 - x_2$ tại $\big(\frac{1}{2}x_2(z_2 - x_2) + z_1 - x_1 + 1, z_2 - x_2\big)$, (d_1) cắt $y_1+y_2 = 1$ tại $(1+(z_1-x_1)/(1+\frac{1}{2}x_2), (x_1 - z_1)/(1 + \frac{1}{2}x_2))$, (d_1) cắt $y_2 = 0$ tại $(z_1 - x_1 + 1, 0)$. Đường thẳng $y_2 = z_2 - x_2$ cắt $y_1 + y_2 = 1$ tại $(1 + x_2 - z_2,\ z_2 - x_2)$.

Do đó có 4 trường hợp (hình 2.7):

(i) $\sup\{y \in L^* | \mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} z\} = \sup\{(\frac{1}{2}x_2(z_2 - x_2) + z_1 - x_1 + 1, z_2 - x_2)$

$$(1 + (z_1 - x_1)/(1 + \tfrac{1}{2}x_2),\ (x_1 - z_1)/(1 + \tfrac{1}{2}x_2))\}$$

$$= (\max(\tfrac{1}{2}x_2(z_2 - x_2) + z_1 - x_1 + 1,\ 1 + (z_1 - x_1)/(1 + \tfrac{1}{2}x_2))$$

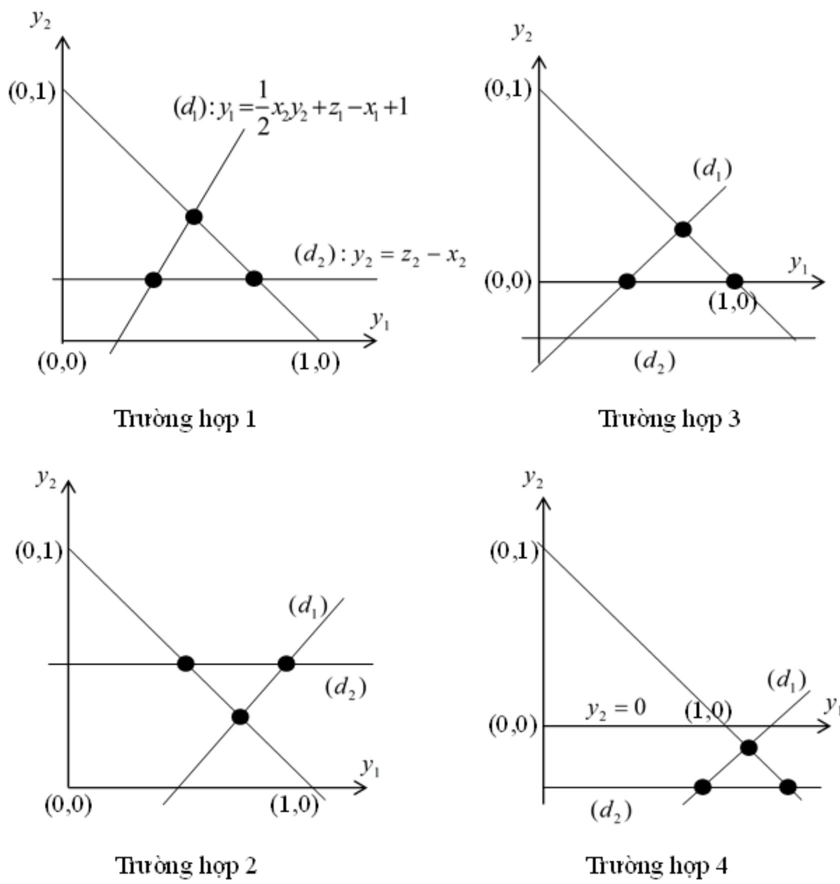
$$\min(z_2 - x_2, 1 + (z_1 - x_1)/(1 + \tfrac{1}{2}x_2)))$$

$$= (\max(\tfrac{1}{2}x_2(z_2 - x_2) + z_1 - x_1 + 1,\ 1 + (z_1 - x_1)/(1 + \tfrac{1}{2}x_2)), z_2 - x_2).$$

(ii) $\sup\{y \in L^* | \mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} z\} = (1 + x_2 - z_2, z_2 - x_2)$.

(iii) $\sup\{y \in L^* | \mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} z\} = (\max(z_1 - x_1 + 1, 1 + (z_1 - x_1)/(1 + \frac{1}{2}x_2)), 0)$.

(iv) $\sup\{y \in L^* | \mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} z\} = 1_{L^*}$.



Hình 2.7: Bốn trường hợp cho miền $\{y \in L^*, \mathcal{T}(x,y) \leq_{L^*} z\}$.

Từ bốn trường hợp ta có

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,z) = (\min(1, 1 + x_2 - z_2, \max(\tfrac{1}{2}x_2 \max(0, z_2 - x_2) + z_1 - x_1 + 1,$$
$$1 + (z_1 - x_1)/(1 + \tfrac{1}{2}x_2))), \max(0, z_2 - x_2)).$$

Với $x = (0.5, 0.4), z = (0.3, 0.5)$ thì $y = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,z) = ((5/6), 0.1) = (0.833..., 0.1)$ nhưng $\mathcal{T}(x,y) = (0.3133..., 0.5) >_{L^*} z$. Do đó $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, không thỏa mãn nguyên tắc residuation. $\square$

2.3.3 Biểu diễn của các t-chuẩn mờ trực cảm

Ta đã định nghĩa tính Archimedean, tính lũy linh của một t-chuẩn mờ trực cảm. Sau đây ta định nghĩa tính lũy linh mờ trực cảm của t-chuẩn mờ trực cảm.

Định nghĩa 2.3.19. *Một t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ được gọi là lũy linh mờ trực cảm nếu và chỉ nếu tồn tại $x, y \in L^*$ sao cho $x_1, y_1 \neq 0$ và $\mathcal{T}(x,y) = 0_{L^*}$.*

Bổ đề 2.3.20. *T-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation thì*

$$\forall x, y, z \in L^*|\mathcal{T}(x, y) = z,\ \exists y' \in L^*|y' \geq_{L^*} y \text{ và } \mathcal{T}(x, y') = z,\ y' = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z).$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation và $x, y, z \in L^*$ sao cho $\mathcal{T}(x, y) = z$, ta có $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z) \geq_{L^*} y$. Với $y' = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z)$, rõ ràng $y' \geq_{L^*} y$, do $\mathcal{T}$ là tăng nên $\mathcal{T}(x, y') \geq_{L^*} \mathcal{T}(x, y)$, tức là $\mathcal{T}(x, y') \geq_{L^*} z$. Mặt khác, từ $y' = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z)$ ta có $\mathcal{T}(x, y') \leq_{L^*} z$, theo nguyên tắc residuation.

Vậy $\mathcal{T}(x, y') =_{L^*} z$. □

Bổ đề 2.3.21. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm thỏa mãn nguyên tắc residuation, giả sử x, y, y' là những phần tử bất kỳ trong L^* và y, y' thỏa mãn:*

$$\mathcal{T}(x, y) = z,\ \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z) = y; \mathcal{T}(x, y') = z',\ \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z') = y'.$$

Khi đó $z \leq_{L^*} z' \Leftrightarrow y \leq_{L^*} y'$.

Bổ đề 2.3.22. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm thỏa mãn nguyên tắc residuation. Khi đó, với bất kỳ $x, y \in L^*, pr_1\mathcal{T}(x, y)$ độc lập với x_2 và y_2.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation. Giả sử $y \in L^*$, ta có $\sup\{(0, 0), y)\} = (y_1, 0)$. Theo Định lý 2.3.16 ta có

$$\mathcal{T}(x, (y_1, 0)) = \sup\{\mathcal{T}(x, (0, 0)), \mathcal{T}(x, y)\}$$
$$\Rightarrow pr_1\mathcal{T}(x, (y_1, 0)) = \max\{pr_1\mathcal{T}(x, (0, 0)), pr_1\mathcal{T}(x, y)\}.$$

Do $\mathcal{T}$ tăng nên $\mathcal{T}(x, (0, 0) \leq_{L^*} \mathcal{T}(1_{L^*}, (0, 0)) = (0, 0)$ suy ra $pr_1\mathcal{T}(x, (0, 0)) = 0$. Vậy $pr_1\mathcal{T}(x, (y_1, 0)) = \max\{0, pr_1\mathcal{T}(x, y)\} = pr_1\mathcal{T}(x, y)$, $pr_1\mathcal{T}(x, y)$ độc lập với y_2. Vì $\mathcal{T}$ giao hoán, kéo theo $pr_1\mathcal{T}(x, y)$ độc lập với x_2. □

Bổ đề 2.3.23. *Giả sử $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation.*

$$T(x_1, y_1) = pr_1\mathcal{T}((x_1, 0), (y_1, 0)),\ \forall x_1, y_1 \in [0, 1].$$

Khi đó T là một t-chuẩn liên tục, Archimedean, lũy linh.

Chứng minh. Với giả thiết của bổ đề và theo Bổ đề 2.3.22 ta có $pr_1\mathcal{T}(x, y)$ độc lập với x_2 và y_2 nên với mọi $x_1, y_1 \in [0, 1]$ ta có:

$$T(x_1, y_1) = pr_1\mathcal{T}((x_1, x_2), (y_1, y_2)), \forall x_2 \in [0, 1 - x_1], \forall y_2 \in [0, 1 - y_1]. \quad (2.13)$$

Do $\mathcal{T}(x, 1_{L^*}) = x, \forall x \in L^*$ nên $T(x_1, 1) = x_1, \forall x_1 \in [0,1]$, do $\mathcal{T}$ giao hoán, tăng nên T giao hoán, tăng và do $\mathcal{T}$ kết hợp nên:

$$\begin{aligned}
T(x_1, T(y_1, z_1)) &= pr_1\mathcal{T}((x_1,0),(pr_1\mathcal{T}((y_1,0),(z_1,0)),0))\\
&= pr_1\mathcal{T}((x_1,0),(pr_1\mathcal{T}((y_1,0),(z_1,0)),pr_2\mathcal{T}((y_1,0),(z_1,0))))\\
&= pr_1\mathcal{T}((x_1,0),\mathcal{T}((y_1,0),(z_1,0)))\\
&= pr_1\mathcal{T}(\mathcal{T}((x_1,0),(y_1,0)),(z_1,0))\\
&= T(T(x_1,y_1),z_1).
\end{aligned}$$

Do đó T là t-chuẩn trên $[0,1]$.

Từ $\mathcal{T}$ là Archimedean với mọi $x = (x_1, 1 - x_1) \in L^*$ ta có $\mathcal{T}(x,x) <_{L^*} x$ dẫn đến $pr_1\mathcal{T}(x,x) < x_1$ (nếu $pr_1\mathcal{T}(x,x) = x_1$, ta phải có $pr_2\mathcal{T}(x,x) > x_2 = 1 - x_1$, mâu thuẫn). Do vậy $T(x_1,x_1) < x_1, \forall x_1 \in [0,1]$ hay T là Archimedean.

Do $\mathcal{T}$ lũy linh mờ trực cảm nên tồn tại $x, y \in L^*$ sao cho $x_1, y_1 > 0, \mathcal{T}(x,y) = 0_{L^*}$ suy ra $T(x_1,y_1) = 0$ hay T là lũy linh. □

Định lý 2.3.24. [8] *Giả sử $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation. Khi đó, tồn tại một song ánh tăng φ trên $[0,1]$ thỏa mãn:*

$$pr_1\mathcal{T}(x,y) = \varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(y_1) - 1)), \forall x, y \in L^*. \tag{2.14}$$

Bổ đề 2.3.25. *Giả sử t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation và $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D,D) \subseteq D$, khi đó*

$$pr_2\mathcal{T}(x,y) = pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)) = pr_2\mathcal{T}(x,(1-y_2,y_2)), \forall x \in D, y \in L^*.$$

Chứng minh. Với giả thiết của bổ đề và giả sử $x, z \in D, y \in L^*$, ta có

$$\mathcal{T}(x,y) \leq_{L^*} z \Leftrightarrow y \leq_{L^*} y' = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,z) \text{ và } y' \in D.$$

Từ $z, y' \in D$ ta có $\mathcal{T}(x,y) \leq_{L^*} z \Leftrightarrow pr_2\mathcal{T}(x,y) \geq z_2, y \leq_{L^*} y' \Leftrightarrow y_2 \geq y'_2$ nên

$$pr_2\mathcal{T}(x,y) \geq z_2 \Leftrightarrow y_2 \geq y'_2.$$

Với $x \in D, y \in L^*$ để $pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)) = z_2$ thì $y_2 \geq y'_2 = pr_2\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,(1-z_2,z_2))$.
Từ $y_2 \geq y'_2$ suy ra $pr_2\mathcal{T}(x,(1-y_2,y_2)) \geq z_2$ và do $\mathcal{T}$ tăng nên

$$pr_2\mathcal{T}(x,(1-y_2,y_2)) \leq pr_2\mathcal{T}(x,y) \leq pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)).$$

Do đó ta có đẳng thức cần chứng minh. □

Bổ đề 2.3.26. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation và $\mathcal{T}((0,0),(0,0)) = 0_{L^*}$. Khi đó, với mọi $x \in L^*, y_2 \in [0,1]$ thì*

$$pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)) = pr_2\mathcal{T}((x_1,0),(0,y_2)) = pr_2\mathcal{T}((x_1,1-x_1),(0,y_2)).$$

Chứng minh. Với giả thiết của bổ đề và giả sử $x \in L^*, y_2 \in [0,1]$ theo Định lý 2.3.16 và $\sup\{(0,0),(x_1,1-x_1)\} = (x_1,0)$ ta có

$$\mathcal{T}((x_1,0),(0,y_2)) = \sup\{\mathcal{T}((0,0),(0,y_2),\mathcal{T}((x_1,1-x_1),(0,y_2)\}$$
$$\Rightarrow pr_2\mathcal{T}((x_1,0),(0,y_2)) = \min\{pr_2\mathcal{T}((0,0),(0,y_2),pr_2\mathcal{T}((x_1,1-x_1),\,(0,y_2))\}.$$

Do $\mathcal{T}((0,0),(0,0)) = 0_{L^*}$ và $\mathcal{T}$ tăng nên $pr_2\mathcal{T}((0,0),(0,y_2) = 1$ dẫn đến

$$pr_2\mathcal{T}((x_1,0),(0,y_2)) = pr_2\mathcal{T}((x_1,1-x_1),(0,y_2)),$$
$$pr_2\mathcal{T}((x_1,0),(0,y_2)) \le pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)) \le pr_2\mathcal{T}((x_1,1-x_1),(0,y_2)).$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.3.27. *Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{T}((0,0),(0,0)) = 0_{L^*}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D,D) \subseteq D$. Khi đó với song ánh φ trong Định lý 2.3.24, $\forall x, y \in L^*$ thì*

$$pr_2\mathcal{T}(x,y) = 1 - \varphi^{-1}(\max(0,\varphi(x_1)+\varphi(1-y_2)-1,\varphi(y_1)+\varphi(1-x_2)-1)). \quad (2.15)$$

Chứng minh. Với giả thiết của định lý, xét ánh xạ $f\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ cho bởi

$$f(x_1,y_2) = pr_2\mathcal{T}((x_1,0),(0,y_2)), \forall x_1,y_2 \in [0,1].$$

Từ $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation và $\sup\{(0,y_2),(y_1,1-y_1)\} = (y_1,y_2)$, theo Định lý 2.3.16, các Bổ đề 2.3.25, 2.3.26, với mọi $x, y \in L^*$ ta có

$$pr_2\mathcal{T}(x,y) = \min\{pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)),pr_2\mathcal{T}(x,(y_1,1-y_1))\}$$
$$= \min\{f(x_1,y_2),pr_2\mathcal{T}((0,x_2),(y_1,1-y_1))\}$$
$$= \min\{f(x_1,y_2),pr_2\mathcal{T}((0,x_2),(y_1,0))\} = \min\{f(x_1,y_2),f(y_1,x_2)\}.$$

Do vậy $pr_2\mathcal{T}(x,y) = \min\{f(x_1,y_2),f(y_1,x_2)\}, \forall x,y \in L^*$.

Bây giờ giả sử $x \in D, y \in L^*$, từ các Bổ đề 2.3.25, 2.3.26 ta có

$$pr_2\mathcal{T}(x,y) = pr_2\mathcal{T}(x,(0,y_2)) = f(x_1,y_2).$$

Lại giả sử $y \in D, x \in L^*$, tương tự ta có $pr_2\mathcal{T}(x,y) = f(y_1,x_2)$. Do đó

$$pr_2\mathcal{T}(x,y) = f(x_1,1-y_1) = f(y_1,1-x_1), \forall x,y \in D.$$

Từ đó $f(x_1, y_1) = f(1 - y_1, 1 - x_1), \forall x_1, y_1 \in [0, 1]$ suy ra

$$f(x_1, 0) = f(1, 1 - x_1) = pr_2\mathcal{T}((1, 0), (0, 1 - x_1)) = 1 - x_1, \forall x_1 \in [0, 1].$$

Giả sử T là ánh xạ trong Bổ đề 2.3.23. Do Bổ đề 2.3.25 ta có

$$\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(z, (0, y_2))) = \mathcal{T}(x, (0, f(z_1, y_2))) = (0, f(x_1, f(z_1, y_2))).$$

Do $\mathcal{T}$ có tính kết hợp nên với mọi $y_2 \in [0, 1], x, z \in L^*$ ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(z, (0, y_2))) &= \mathcal{T}(\mathcal{T}(x, z), (0, y_2))\\ &= \mathcal{T}((T(x_1, z_1), pr_2\mathcal{T}(x, z)), (0, y_2))\\ &= (0, f(T(x_1, z_1), y_2)).\end{aligned}$$

Vì vậy $f(x_1, f(z_1, y_2)) = f(T(x_1, z_1), y_2), \forall x_1, z_1, y_2 \in [0, 1]$.

Bây giờ giả sử $y_2 = 0$, khi đó với mọi $x_1, z_1 \in [0, 1]$ ta có

$$f(x_1, 1 - z_1) = f(x_1, f(z_1, 0)) = f(T(x_1, z_1), 0) = 1 - T(x_1, z_1).$$

Do vậy $f(x_1, z_1) = 1 - T(x_1, 1 - z_1), \forall x_1, z_1 \in [0, 1]$.

Ta lại có $pr_2\mathcal{T}(x, y) = \min\{1 - T(x_1, 1 - y_2), 1 - T(y_1, 1 - x_2)\}$.

Theo Định lý 2.3.24 và do $pr_1\mathcal{T}(x, y) = T(x_1, y_1)$, ta nhận được

$$\begin{aligned}pr_2\mathcal{T}(x, y) = \min\{&1 - \varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(1 - y_2) - 1)),\\ &1 - \varphi^{-1}(\max(0, \varphi(y_1) + \varphi(1 - x_2) - 1))\}.\\ = 1 - \varphi^{-1}&(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(1 - y_2) - 1, \varphi(y_1) + \varphi(1 - x_2) - 1)).\end{aligned}$$

□

Định lý 2.3.28. *Giả sử $\mathcal{T}$ là ánh xạ $(L^*)^2 - L^*$ và tồn tại một song ánh liên tục, tăng Φ trên L^* với Φ^{-1} tăng sao cho*

$$\mathcal{T} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{T}_W \circ (\Phi \times \Phi),$$

với $\mathcal{T}_W$ là t-chuẩn mờ trực cảm Lukasiewicz. Khi đó, $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D, D) \subseteq D, \mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = 0_{L^*}$.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{T} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{T}_W \circ (\Phi \times \Phi)$, với mọi $x, y \in L^*$ ta có:

$$\mathcal{T}_W(x, y) = (\max(0, x_1 + y_1 - 1), \min(1, x_2 + 1 - y_1, y_2 + 1 - x_1)).$$

Giả sử Φ là một song ánh tăng, liên tục trên L^* và do $\mathcal{T}_W$ là t-chuẩn mờ trực cảm, liên tục nên dễ dàng nhận được $\mathcal{T}$ giao hoán, tăng, liên tục và

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(1_{L^*}, y) &= \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W((\Phi(1_{L^*}), \Phi(y)))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W(1_{L^*}, \Phi(y))) \\
&= \Phi^{-1}(\Phi(y)) = y, \forall y \in L^*.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z)) &= \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W((\Phi(x), \Phi(\Phi^{-1}(\mathcal{T}_W((\Phi(y), \Phi(z))))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W((\Phi(x), \mathcal{T}_W((\Phi(y), \Phi(z))) \\
&= \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W(\mathcal{T}_W((\Phi(x), \Phi(y)), (\Phi(z)) \\
&= \mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), z).
\end{aligned}
$$

Do đó, $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục. Ta chứng minh $\mathcal{T}_W$ thỏa mãn các tính chất đã được liệt kê. Ta có $\mathcal{T}_W$ Archimedean vì

$$
\mathcal{T}_W(x, x) = (\max(0, 2x_1 - 1), \min(1, x_2 + 1 - x_1)) <_{L^*} x, \forall x \in L^* \backslash \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}.
$$

Chọn $x \in D, 0 < x_1 \leq 0.5$ thì $\mathcal{T}_W(x, x) = 0_{L^*}$ nên $\mathcal{T}_W$ lũy linh mờ trực cảm. Ta có $\mathcal{T}_W((0,0),(0,0)) = 0_{L^*}$ và với mọi $x, y, z \in L^*$ thì

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_W(x, y) \leq_{L^*} z &\Leftrightarrow \{x_1 + y_1 - 1 \leq z_1,\ x_2 + 1 - y_1 \geq z_2,\ y_2 + 1 - x_1 \geq z_2\} \\
&\Leftrightarrow \{y_1 \leq \min(z_1 + 1 - x_1, x_2 + 1 - z_2),\ y_2 \geq z_2 + x_1 - 1\} \\
&\Leftrightarrow \{y_1 \leq \min(1, z_1 + 1 - x_1, x_2 + 1 - z_2),\ y_2 \geq \max(0, z_2 + x_1 - 1)\}.
\end{aligned}
$$

Ta có $a = (\min(1, z_1 + 1 - x_1, x_2 + 1 - z_2), \max(0, z_2 + x_1 - 1)) \in L^*$ nên $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(x, z) = a$, $\mathcal{T}_W$ mãn nguyên tắc residuation.

Ta có $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(D, D) \subseteq D$ vì

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(x, z) &= (\min(1, z_1 + 1 - x_1), \max(0, 1 - z_1 + x_1 - 1)) \\
&= (\min(1, z_1 + 1 - x_1), 1 - \min(1, z_1 + 1 - x_1)) \in D,\ \forall x, z \in D.
\end{aligned}
$$

Bây giờ, ta chứng minh $\mathcal{T}$ thỏa mãn các tính chất đã liệt kê. Ta có $\mathcal{T}$ là Archimedean do với mọi $x \in L^*$, $\Phi(x) \notin \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ hay $x \in L^* \backslash \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ ta có

$$
\mathcal{T}(x, x) = \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W((\Phi(x), \Phi(x)))) <_{L^*} \Phi^{-1}(\Phi(x)) = x.
$$

Do Φ là một song ánh và $\Phi(D) = D$ (theo bổ đề 2.3.6) nên tồn tại $x \in D$ để $pr_1\Phi(x) \leq 0.5$. Cho $y = \Phi(x)$ ta có $y_1 \leq 0.5, y \in D$. Khi đó:

$$
\mathcal{T}(x, x) = \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W(y, y)) = \Phi^{-1}(0_{L^*}) = 0_{L^*}.
$$

Do đó $\mathcal{T}$ là lũy linh mờ trực cảm. Do $\mathcal{T}_W$ thỏa mãn nguyên tắc residuation, với mọi $x, y, z \in L^*$ ta có

$$\mathcal{T}(x,y)\leq_{L^*} z \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W(\Phi(x),\Phi(y)))\leq_{L^*} z \Leftrightarrow \mathcal{T}_W(\Phi(x),\Phi(y))\leq_{L^*}\Phi(z)$$
$$\Leftrightarrow \Phi(y)\leq_{L^*}\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(\Phi(x),\Phi(z)) \Leftrightarrow y\leq_{L^*}\Phi^{-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(\Phi(x),\Phi(z))).$$

Do đó $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \Phi^{-1}\circ\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}\circ(\Phi\times\Phi)$ và $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation.

Bây giờ, giả sử $x, z \in D$ ta có $\Phi(x), \Phi(z) \in D$. Do $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(D,D) \subseteq D$ nên $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(\Phi(x),\Phi(z)) \in D$ suy ra $\Phi^{-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(\Phi(x),\Phi(z))) \in D$ (do $\Phi(D) = D$), do đó $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D,D) \subseteq D$.

Từ Bổ đề 2.3.2, ta có $\Phi(0,0) = (0,0)$ nên

$$\mathcal{T}((0,0),(0,0)) = \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W((0,0),(0,0))) = \Phi^{-1}(0_{L^*}) = 0_{L^*}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.3.29. *Với $\mathcal{T}$ là ánh xạ $(L^*)^2 - L^*$, những điều sau là tương đương:*

(i) $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D,D) \subseteq D$, $\mathcal{T}((0,0),(0,0)) = 0_{L^*}$.

(ii) Tồn tại một song ánh tăng, liên tục φ trên $[0,1]$ sao cho $\forall x, y \in L^*$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x,y) = (&\varphi^{-1}(\max(0,\varphi(x_1)+\varphi(y_1)-1)),\\ &1-\varphi^{-1}(\max(0,\varphi(x_1)+\varphi(1-y_2)-1,\varphi(y_1)+\varphi(1-x_2)-1))).\end{aligned} \tag{2.16}$$

(iii) Tồn tại một song ánh liên tục, tăng Φ trên L^* với Φ^{-1} tăng thỏa mãn:

$$\mathcal{T} = \Phi^{-1}\circ\mathcal{T}_W\circ(\Phi\times\Phi). \tag{2.17}$$

Chứng minh. Từ các Định lý 2.3.24, 2.3.27 suy ra: *i)* kéo theo *ii)*. Từ Định lý 2.3.28 ta có: *iii)* kéo theo *i)*. Bây giờ giả sử ta có *ii)*, ta xét hàm

$$\Phi(x) = (\varphi(x_1),(N_S\circ\varphi\circ N_S)(x_2)) = (\varphi(x_1), 1-\varphi(1-x_2)), \forall x, y \in L^*.$$

Ta có $y = \Phi(x) \Leftrightarrow x_1 = \varphi^{-1}(y_1), x_2 = 1-\varphi^{-1}(1-y_2)$ suy ra

$$\Phi^{-1}(x) = (\varphi^{-1}(x_1), 1-\varphi^{-1}(1-x_2)) = (\varphi^{-1}(x_1),(N_S\circ\varphi^{-1}\circ N_S)(x_2)).$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_W(x,y) &= (\max(0,x_1+y_1-1),\min(1,x_2+1-y_1,y_2+1-x_1))\\ &= (\max(0,x_1+y_1-1),1-\max(0,y_1-x_2,x_1-y_2)).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
pr_1\mathcal{T}(x,y) &= \varphi^{-1}(\max(0,\varphi(x_1)+\varphi(y_1)-1)) \\
&= (\varphi^{-1}\circ pr_1\mathcal{T}_W)(\Phi(x),\Phi(y)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
pr_2\mathcal{T}(x,y) &= 1-\varphi^{-1}(\max(0,\varphi(x_1)+\varphi(1-y_2)-1),\varphi(y_1)+\varphi(1-x_2)-1)) \\
&= (N_S\circ\varphi^{-1}\circ N_S)(1-(\max(0,\varphi(x_1)-(N_S\circ\varphi\circ N_S)(y_2), \\
&\qquad\qquad \varphi(y_1)-(N_S\circ\varphi\circ N_S)(x_2))) \\
&= (N_S\circ\varphi^{-1}\circ N_S\circ pr_2\mathcal{T}_W)((\varphi(x_1),(N_S\circ\varphi\circ N_S)(x_2)), \\
&\qquad\qquad (\varphi(y_1),(N_S\circ\varphi\circ N_S)(y_2))) \\
&= (N_S\circ\varphi^{-1}\circ N_S\circ pr_2\mathcal{T}_W)(\Phi(x),\Phi(y)).
\end{aligned}
$$

Vậy $\mathcal{T}(x,y) = (\Phi^{-1}\circ\mathcal{T}_W)\circ(\Phi(x)\times\Phi(y)), \forall x,y\in L^*$, *ii)* kéo theo *iii)*. □

Nhận xét 2.3.30. Từ phần chứng minh của Định lý 2.3.28 ta có

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,z) &= (\Phi^{-1}\circ\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W})\circ(\Phi(x)\times\Phi(z)) \\
&= (\Phi^{-1}\circ\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W})((\varphi(x_1),1-\varphi(1-x_2)),(\varphi(z_1),1-\varphi(1-z_2))) \\
&= \Phi^{-1}(\min(1,\varphi(z_1)+1-\varphi(x_1),1-\varphi(1-x_2)+\varphi(1-z_2)), \\
&\qquad \max(0,\varphi(x_1)-\varphi(1-z_2))) \\
&= (\varphi^{-1}(\min(1,\varphi(z_1)+1-\varphi(x_1),1-\varphi(1-x_2)+\varphi(1-z_2))), \\
&\qquad 1-\varphi^{-1}(1-\max(0,\varphi(x_1)-\varphi(1-z_2)))).
\end{aligned}
$$

Ánh xạ $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$: $L^*\to L^*$, $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}(x)=\mathcal{I}(x,0_{L^*}), \forall x\in L^*$ là một phủ định mờ trực cảm. Với $N=\varphi^{-1}\circ N_S\circ\varphi$ ta có

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(x) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,0_{L^*}) &= (\varphi^{-1}(1-\varphi(1-x_2)),1-\varphi^{-1}(1-\varphi(x_1))) \\
&= (N(1-x_2),1-N(x_1)).
\end{aligned}
$$

Nhận xét 2.3.31. Hai điều kiện $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D,D)\subseteq D$ và $\mathcal{T}((0,0),(0,0))=0_{L^*}$ trong Định lý 2.3.28 là độc lập với nhau và độc lập với các điều kiện còn lại.

Ta xét hai ví dụ sau để kiểm chứng Nhận xét 2.3.31.

Ví dụ 2.3.32. Ánh xạ $\mathcal{T}$ cho dưới đây ($\forall x,y\in L^*$) là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{T}((0,0),(0,0))=0_{L^*}$ nhưng không thỏa mãn $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D,D)\subseteq D$.

$$\mathcal{T}(x,y) = (\max(0,x_1+y_1-1),\min(1,y_2+3(1-x_1),x_2+3(1-y_1),1-x_1+1-y_1)).$$

Chứng minh. Ta thấy ngay $\mathcal{T}$ liên tục, giao hoán, tăng, $\mathcal{T}(1_{L^*}, y) = y$. Ta có

$$\begin{aligned}
&pr_2\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z)) \\
&= \min(1, \min(1, z_2 + 3(1 - y_1), y_2 + 3(1 - z_1), 1 - y_1 + 1 - z_1) + 3(1 - x_1), \\
&\quad x_2 + 3(1 - \max(0, y_1 + z_1 - 1)), 1 - x_1 + 1 - \max(0, y_1 + z_1 - 1)) \\
&= \min(1, z_2 + 3(1 - y_1) + 3(1 - x_1), y_2 + 3(1 - z_1) + 3(1 - x_1), \\
&\quad x_2 + 3(1 - y_1) + 3(1 - z_1), 1 - x_1 + 1 - y_1 + 1 - z_1).
\end{aligned}$$

Do đó $pr_2\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z))$ là đối xứng giữa x, y, z và tương tự $pr_1\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z))$ là đối xứng giữa x, y, z dẫn đến $\mathcal{T}$ kết hợp.

Vậy $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm.

Ta có $\mathcal{T}$ là Archimedean do với mọi $x \in L^*\backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ thì

$$\mathcal{T}(x, x) = (\max(0, 2x_1 - 1), \min(1, x_2 + 3(1 - x_1), 2(1 - x_1)))<_{L^*}x$$
$$(\forall x \in L^*\backslash\{0_{L^*}\}|x_1 = 0 \text{ thì } \mathcal{T}(x, x) = 0_{L^*}<_{L^*}x).$$

Chọn $x = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ta có $\mathcal{T}(x, x) = 0_{L^*}$ nên $\mathcal{T}$ là lũy linh mờ trực cảm.

Với mọi $x, y, z \in L^*$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x, y)\leq_{L^*}z \Leftrightarrow \{&x_1 + y_1 - 1 \leq z_1,\ y_2 + 3(1 - x_1) \geq z_2, \\
&x_2 + 3(1 - y_1) \geq z_2, 1 - x_1 + 1 - y_1 \geq z_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \{&y_1 \leq \min(1, z_1 + 1 - x_1, 1 - \tfrac{1}{3}(z_2 - x_2), 1 - x_1 + 1 - z_2), \\
&y_2 \geq \max(0, z_2 - 3(1 - x_1))\}.
\end{aligned}$$

Với $a_1 = \min(1, z_1+1-x_1, 1-\frac{1}{3}(z_2-x_2), 1- x_1+1-z_2), a_2 = \max(0, z_2-3(1-x_1))$ ta có $a_1 \leq 1, a_1 + z_2 - 3(1 - x_1) \leq 1 - x_1 + 1 - z_2 + z_2 - 3(1 - x_1) = 2x_1 - 1 \leq 1$. Do đó $a = (a_1, a_2) \in L^*$ và $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z) = a$, $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation.

Thấy ngay $\mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = 0_{L^*}$. Bây giờ giả sử $x, z \in D$, ta có

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z) = (\min(1, 1 + z_1 - x_1, 1 + \tfrac{1}{3}(z_1 - x_1)), \max(0, 3x_1 - z_1 - 2)).$$

Chọn $x_1 = 0.5, z_1 = 0.2$ ta được $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z) = (0.7, 0) \notin D$ suy ra $\mathcal{T}$ không thỏa mãn $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D, D) \subseteq D$. □

Ví dụ 2.3.33. Ánh xạ $\mathcal{T}$ cho dưới đây ($\forall x, y \in L^*$) là một t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D, D) \subseteq D$ nhưng không thỏa mãn $\mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = 0_{L^*}$.

$$\mathcal{T}(x, y) = (\max(0, x_1 + y_1 - 1), \min(1, x_2 + y_2 + \tfrac{1}{3}, 1 - x_1 + y_2, 1 - y_1 + x_2)).$$

Chứng minh. Thấy ngay $\mathcal{T}$ liên tục, giao hoán, tăng, $\mathcal{T}(1_{L^*}, y) = y$. Ta có

$$\begin{aligned}
&pr_2\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z)) \\
&= \min(1, x_2 + \min(1, y_2 + z_2 + \tfrac{1}{3}, 1 - y_1 + z_2, 1 - z_1 + y_2) + \tfrac{1}{3}, 1 - x_1 + \min \\
&\quad (1, y_2 + z_2 + \tfrac{1}{3}, 1 - y_1 + z_2, 1 - z_1 + y_2), 1 - \max(0, y_1 + z_1 - 1) + x_2) \\
&\quad = \min(1, x_2 + y_2 + z_2 + \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3} - y_1 + x_2 + z_2, \tfrac{4}{3} - z_1 + x_2 + y_2, \tfrac{4}{3} - x_1 \\
&\qquad + y_2 + z_2, 2 - x_1 - y_1 + z_2, 2 - x_1 - z_1 + y_2, 2 - y_1 - z_1 + x_2).
\end{aligned}$$

Do đó $pr_2\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z))$ đối xứng giữa x, y, z, ta cũng có $pr_1\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, z))$ đối xứng giữa x, y, z dẫn đến $\mathcal{T}$ kết hợp. Do vậy $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm.

Ta có $\mathcal{T}$ là Archimedean vì với mọi $x \in L^*\backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ thì

$$\mathcal{T}(x, x) = (\max(0, 2x_1 - 1), \min(1, 2x_2 + \tfrac{1}{3}, 1 - x_1 + x_2)) <_{L^*} x.$$

Chọn $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ ta có $\mathcal{T}(x, x) = 0_{L^*}$ nên $\mathcal{T}$ là lũy linh mờ trực cảm.

Với mọi $x, y, z \in L^*$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x, y) \leq_{L^*} z \Leftrightarrow \{&x_1 + y_1 - 1 \leq z_1, x_2 + y_2 + \tfrac{1}{3} \geq z_2, 1 - x_1 + y_2 \geq z_2, \\
&1 - y_1 + x_2 \geq z_2 \} \\
\Leftrightarrow \{&y_1 \leq \min(1, z_1 + 1 - x_1, 1 + x_2 - z_2), \\
&y_2 \geq \max(0, z_2 - x_2 - \tfrac{1}{3}, z_2 + x_1 - 1)\}.
\end{aligned}$$

Do đó $\mathcal{T}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation do $\mathcal{I}_\mathcal{T}(x, z) = a \in L^*$ với

$$a = (\min(1, z_1 + 1 - x_1, 1 + x_2 - z_2), \max(0, z_2 - x_2 - \tfrac{1}{3}, z_2 + x_1 - 1)).$$

Bây giờ giả sử $x, z \in D$ thì $\mathcal{I}_\mathcal{T}(x, z) = (\min(1, 1 + z_1 - x_1), \max(0, x_1 - z_1)) \in D$.

Ta lại có $\mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = (0, \frac{1}{3}) \neq 0_{L^*}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

2.3.4 Biểu diễn của các t-đối chuẩn mờ trực cảm

Định nghĩa 2.3.34. *Một phép đối kéo theo (coimplicator) mờ trực cảm $\mathcal{I}^c$ là một ánh xạ $(L^*)^2 \to L^*$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

- $\mathcal{I}^c(0_{L^*}, 0_{L^*}) = 0_{L^*}$, $\mathcal{I}^c(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$, $\mathcal{I}^c(1_{L^*}, 1_{L^*}) = 0_{L^*}$, $\mathcal{I}^c(1_{L^*}, 0_{L^*}) = 0_{L^*}$.

- $\forall x, x' \in L^*, x \leq_{L^*} x' \Rightarrow \mathcal{I}^c(x, y) \geq_{L^*} \mathcal{I}^c(x', y), \forall y \in L^*$.

- $\forall y, y' \in L^*, y \leq_{L^*} y' \Rightarrow \mathcal{I}^c(x, y) \leq_{L^*} \mathcal{I}^c(x, y'), \forall x \in L^*$.

Nguyên tắc 2.3.35. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation nếu và chỉ nếu*

$$\forall x, y, z \in L^*, \mathcal{S}(x, y) \geq_{L^*} z \Leftrightarrow y \geq_{L^*} \mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, z), \tag{2.18}$$

với phép đối kéo theo $\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, z) = \inf\{\gamma | \gamma \in L^*, \mathcal{S}(x, \gamma) \geq_{L^*} z\}$.

Nói chung, đối với t-chuẩn mờ trực cảm, nguyên tắc residuation không tương đương với tính liên tục-phải mờ trực cảm. Tương tự phần 2.3.2, ta có hai định lý sau được chứng minh.

Định lý 2.3.36. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm. Khi đó $\mathcal{S}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation nếu và chỉ nếu*

$$\inf_{z \in Z} \mathcal{S}(x, z) = \mathcal{S}(x, \inf_{z \in Z} z), \tag{2.19}$$

với $x \in L^*$ bất kỳ và tập con Z khác rỗng bất kỳ của L^*.

Định lý 2.3.37. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm, t-biểu diễn được. Khi đó, các ánh xạ thành phần của $\mathcal{S}$ là liên tục-phải mờ trực cảm nếu và chỉ nếu $\mathcal{S}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation.*

Tương tự như phần 2.3.3, ta có định nghĩa và các bổ đề, định lý sau:

Định nghĩa 2.3.38. *Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là lũy linh mờ trực cảm nếu và chỉ nếu tồn tại $x, y \in L^*$ sao cho $x_2, y_2 \neq 0$ và $\mathcal{S}(x, y) = 1_{L^*}$.*

Bổ đề 2.3.39. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation. Khi đó, với x, y, z bất kỳ thuộc L^* thỏa mãn $\mathcal{S}(x, y) = z$, tồn tại $y' \in L^*$ sao cho $y' \leq_{L^*} y$ và $\mathcal{S}(x, y') = z$, $y' = \mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, z)$.*

Bổ đề 2.3.40. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, giả sử x, y và y' bất kỳ thuộc L^* thỏa mãn:*

$$\mathcal{S}(x, y) = z, \mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, z) = y; \mathcal{S}(x, y') = z', \mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, z') = y'.$$

Khi đó $z \leq_{L^*} z' \Leftrightarrow y \leq_{L^*} y'$.

Bổ đề 2.3.41. *Nếu t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{S}((0,0)(0,0)) = 1_{L^*}$ thì $pr_2\mathcal{S}(x, y)$ độc lập với x_1 và y_1 với mọi $x, y \in L^*$.*

Bổ đề 2.3.42. *Giả sử $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{S}((0,0)(0,0)) = 1_{L^*}$. Ánh xạ S được xác định như sau (với mọi $x_2, y_2 \in [0,1]$):*

$$S(x_2, y_2) = 1 - pr_2\mathcal{S}((0, 1-x_2), (0, 1-y_2)) = 1 - pr_2\mathcal{S}((x_2, 1-x_2), (y_2, 1-y_2)).$$

Khi đó, S là một t-đối chuẩn liên tục, Archimedean, lũy linh.

Định lý 2.3.43. *Giả sử $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation và $\mathcal{S}((0,0)(0,0)) = 1_{L^*}$. Khi đó, tồn tại một song ánh tăng φ trên $[0,1]$ thỏa mãn:*

$$pr_2\mathcal{S}(x,y) = 1 - \varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1-x_2) + \varphi(1-y_2))), \forall x, y \in L^*. \tag{2.20}$$

Bổ đề 2.3.44. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(D,D) \subseteq D$. Khi đó, với mọi $x \in D, y_2 \in [0,1]$ thì*

$$pr_1\mathcal{S}(x, (y_1, 0)) = pr_1\mathcal{S}(x, (y_1, 1-y_1)).$$

Bổ đề 2.3.45. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation và $\mathcal{S}((0,0)(0,0)) = 1_{L^*}$. Khi đó, với mọi $y_1, x_2 \in [0,1]$ thì*

$$pr_1\mathcal{S}((0, x_2), (y_1, 0)) = pr_1\mathcal{S}((1-x_2, x_2)(y_1, 0)).$$

Định lý 2.3.46. *Giả sử $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation $\mathcal{S}((0,0),(0,0)) = 1_{L^*}$, $\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(D,D) \subseteq D$. Với φ là song ánh trong định lý 2.3.43, với mọi $x, y \in L^*$ ta có*

$$pr_1\mathcal{S}(x,y) = \varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1-x_2) + \varphi(y_1)), \varphi(1-y_2) + \varphi(x_1))). \tag{2.21}$$

Nhận xét 2.3.47. Nếu $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm thỏa mãn nguyên tắc residuation, thì t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ đối ngẫu của $\mathcal{T}$ qua $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation. Ngược lại, nếu $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm thỏa mãn nguyên tắc residuation thì t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ đối ngẫu của $\mathcal{S}$ qua $\mathcal{N}_{\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}}$ thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}}$.

Ví dụ 2.3.48. Xét hai toán tử $\mathcal{T}_W$, $\mathcal{S}_W$, với mọi $\forall x, y \in L^*$:

$$\mathcal{S}_W(x,y) = (\min(1, 1-x_2+y_1, 1-y_2+x_1), 1 - \min(1, 1-x_2+1-y_2)),$$
$$\mathcal{T}_W(x,y) = (\max(0, x_1+y_1-1), \min(1, x_2+1-y_1, y_2+1-x_1)).$$

Toán tử $\mathcal{S}_W$ đối ngẫu $\mathcal{T}_W$ qua $\mathcal{N}_S$ và $\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}_W} = \mathcal{N}_S \circ \mathcal{I}_{\mathcal{T}_W} \circ (\mathcal{N}_S \times \mathcal{N}_S)$, ta có

$$\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}_W}(x, z) = (\max(0, z_1 + x_2 - 1), \min(1, z_2 + 1 - x_2, x_1 + 1 - z_1)).$$

Định lý 2.3.49. *Giả sử $\mathcal{S}$ là ánh xạ $(L^*)^2 - L^*$. Giả sử tồn tại một song ánh tăng, liên tục Φ trên L^* với Φ^{-1} tăng, thỏa mãn $\mathcal{S} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{S}_W \circ (\Phi \times \Phi)$ ($\mathcal{S}_W$ là toán tử trong Ví dụ 2.3.48). Khi đó, $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(D, D) \subseteq D$, $\mathcal{S}((0,0)(0,0)) = 1_{L^*}$.*

Định lý 2.3.50. *Với $\mathcal{S}$ là ánh xạ $(L^*)^2 - L^*$, những điều sau là tương đương:*

(i) $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(D, D) \subseteq D$, $\mathcal{S}((0,0)(0,0)) = 1_{L^*}$.

(ii) Tồn tại một song ánh tăng, liên tục φ trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(x, y) = (&\varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1 - x_2) + \varphi(y_1), \varphi(1 - y_2) + \varphi(x_1))),\\ &1 - \varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1 - x_2) + \varphi(1 - y_2)))), \forall x, y \in L^*.\end{aligned} \tag{2.22}$$

(iii) Tồn tại một song ánh tăng, liên tục Φ trên L^* với Φ^{-1} tăng thỏa mãn:

$$\mathcal{S} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{S}_W \circ (\Phi \times \Phi). \tag{2.23}$$

Nhận xét 2.3.51. Ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, z) = (&\varphi^{-1}(\max(0, \varphi(z_1) - \varphi(1 - x_2))),\\ 1 - &\varphi^{-1}(1 - \min(1, 1 - \varphi(1 - z_2) + \varphi(1 - x_2), \varphi(x_1) + 1 - \varphi(z_1))))\end{aligned}$$

Ánh xạ $\mathcal{N}_{\mathcal{I}^c}$: $L^* \to L^*$ cho bởi $\mathcal{N}_{\mathcal{I}^c}(x) = \mathcal{I}^c(x, 1_{L^*})$ ($\forall x \in L^*$) là một phủ định mờ trực cảm. Với $N = \varphi^{-1} \circ N_S \circ \varphi$) ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}}(x) = \mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}(x, 1_{L^*}) &= (\varphi^{-1}(1 - \varphi(1 - x_2)), 1 - \varphi^{-1}(1 - \varphi(x_1))),\\ &= (N(1 - x_2), 1 - N(x_1)).\end{aligned}$$

Định lý 2.3.52. *Giả sử $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm và giả sử tồn tại một song ánh liên tục, tăng φ trên $[0,1]$ sao cho đẳng thức (2.22) được thỏa mãn. Khi đó, t-chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{T}$ đối ngẫu của $\mathcal{S}$ qua $\mathcal{N}_{\mathcal{I}^c_{\mathcal{S}}}$ thỏa mãn (2.16) với cùng một song ánh φ.*

Giả sử $\mathcal{T}$ là một t-chuẩn mờ trực cảm và giả sử tồn tại một song ánh liên *tục, tăng φ trên $[0,1]$ sao cho đẳng thức (2.16) được thỏa mãn. Khi đó, t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ đối ngẫu của $\mathcal{T}$ qua $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}$ thỏa mãn (2.22) với cùng một song ánh φ.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{S}$ là t-đối chuẩn mờ trực cảm và tồn tại một song ánh liên tục, tăng φ trên $[0,1]$ sao cho đẳng thức (2.22) được thỏa mãn, khi đó

$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(x) = (\varphi^{-1}(1-\varphi(1-x_2)), 1-\varphi^{-1}(1-\varphi(x_1))), \forall x \in L^*.$$

Ta có $\mathcal{T}$ thỏa mãn (2.16), thật vậy:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}(x,y)\\
&= \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(\mathcal{S}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(x), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(y))\\
&= (\varphi^{-1}(1-\varphi(1-pr_2\mathcal{S}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(x), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(y)))),\\
&\qquad\qquad\qquad 1-\varphi^{-1}(1-\varphi(pr_1\mathcal{S}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(x), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{S}^c}(y)))))\\
&= (\varphi^{-1}(1-\min(1, 1-\varphi(x_1)+1-\varphi(y_1))),\\
&\quad 1-\varphi^{-1}(1-\min(1, 1-\varphi(x_1)+1-\varphi(1-y_2), 1-\varphi(y_1)+1-\varphi(1-x_2)))\\
&= (\varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1)+\varphi(y_1)-1)),\\
&\quad 1-\varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1)+\varphi(1-y_2)-1, \varphi(y_1)+\varphi(1-x_2)-1))).
\end{aligned}$$

Bây giờ, giả sử $\mathcal{T}$ là t-chuẩn mờ trực cảm và tồn tại một song ánh liên tục, tăng φ trên $[0,1]$ sao cho đẳng thức (2.16) được thỏa mãn, khi đó

$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(x) = (\varphi^{-1}(1-\varphi(1-x_2)), 1-\varphi^{-1}(1-\varphi(x_1))), \forall x \in L^*.$$

Ta có $\mathcal{S}$ thỏa mãn (2.22), thật vậy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x,y) &= \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(\mathcal{T}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(x), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(y))\\
&= (\varphi^{-1}(1-\varphi(1-pr_2\mathcal{T}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(x), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(y)))),\\
&\qquad 1-\varphi^{-1}(1-\varphi(pr_1\mathcal{T}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(x), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_\mathcal{T}}(y)))))\\
&= (\varphi^{-1}(1-\max(0, 1-\varphi(1-x_2)-\varphi(y_1), 1-\varphi(1-y_2)-\varphi(x_1))),\\
&\qquad 1-\varphi^{-1}(1-\max(0, 1-\varphi(1-x_2)-\varphi(1-y_2))))\\
&= (\varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1-x_2)+\varphi(y_1), \varphi(1-y_2)+\varphi(x_1))),\\
&\qquad 1-\varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1-x_2)+\varphi(1-y_2)))).
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

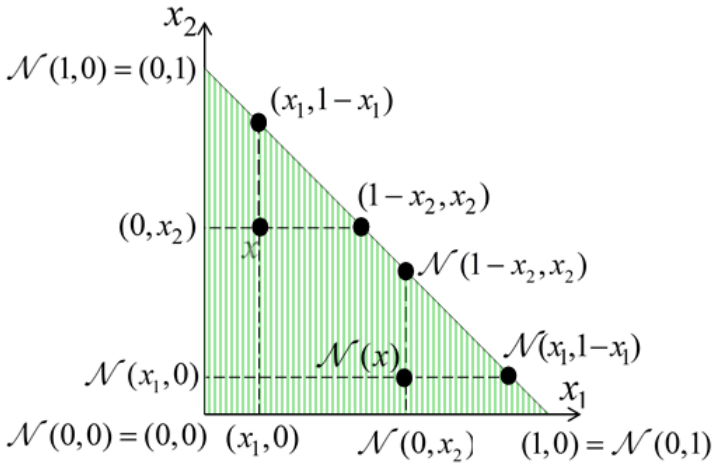
2.4 Một số tổng hợp

Các toán tử mờ trực cảm được xây dựng trên tập L^*, L^{*2}.

(i) Các tính chất cơ bản của toán tử phủ định mờ trực cảm cuộn $\mathcal{N}$: $L^* \to L^*$ được minh họa theo hình 2.8, ta có biểu diễn:

$$\mathcal{N}(x) = (N(1 - x_2), 1 - N(x_1)), \forall x \in L^*.$$

với phép phủ định mờ $N(a) = pr_1\mathcal{N}(a, 1 - a)$, $\forall a \in [0, 1]$.



Hình 2.8: Phép phủ định cuộn trên L^*.

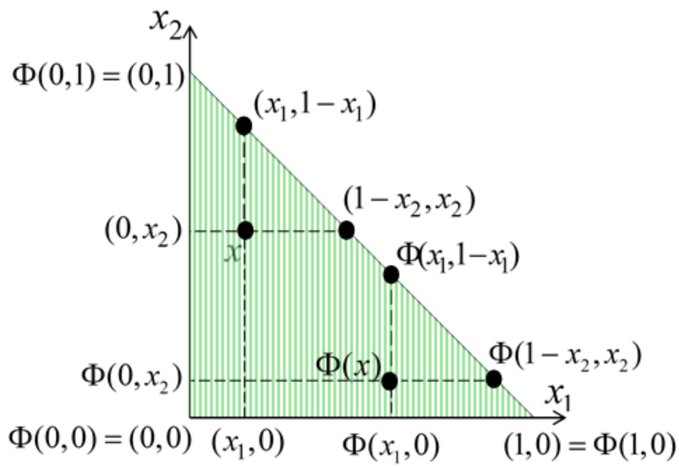
(ii) Các toán tử lôgic t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được (t-representable) được phân lớp dựa trên tính lũy linh chặt của t-chuẩn và t-đối chuẩn mờ.

(iii) Các tính chất cơ bản cuả phép biến đổi liên tục, tăng ϕ trên L^* với Φ^{-1} tăng, được minh họa theo hình 2.9, ta có biểu diễn:

$$\Phi(x) = (\varphi(x_1), 1 - \varphi(1 - x_2)), \forall x \in L^*.$$

với song ánh $\varphi(a) = pr_1\Phi(a, 1 - a)$, $\forall a \in [0, 1]$.

Các toán tử $\mathcal{T}$ thuộc lớp t-chuẩn mờ trực cảm liên tục, Archimedean, lũy linh mờ trực cảm, thỏa mãn nguyên tắc residuation, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(D, D) \subseteq D$, $\mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = 0_{L^*}$ có biểu diễn thông qua song ánh tăng, liên tục φ trên



Hình 2.9: Phép biến đổi liên tục, tăng trên L^* với Φ^{-1} tăng.

[0,1]:

$$\mathcal{T}(x,y) = (\varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(y_1) - 1)),$$

$$1 - \varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(1-y_2) - 1, \varphi(y_1) + \varphi(1-x_2) - 1))),$$

hay $\mathcal{T}$ có biểu diễn thông qua song ánh tăng, liên tục Φ trên L^* với Φ^{-1} tăng:

$$\mathcal{T} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{T}_W \circ (\Phi \times \Phi).$$

Có thể phân lớp các toán tử t-đối chuẩn mờ trực cảm một cách tương tự.

Kết luận và kiến nghị

Ngành khoa học mờ được khai sinh từ năm 1965 đến nay, không ngừng được nghiên cứu và phát triển, đã chứng tỏ là một công cụ hiệu quả để giải quyết các bài toán từ nhu cầu thực tiễn. Đến năm 1983, ngành khoa học mờ trực cảm xuất hiện đã khắc phục một số hạn chế của khoa học mờ, đã và đang được thúc đẩy nghiên cứu nhưng còn nhiều vấn đề cần làm sáng tỏ để hoàn chỉnh.

Qua quá trình thực hiện luận văn có đề tài "**Một số toán tử lôgic mờ trực cảm**" với sự tìm hiểu về lý thuyết mờ, lý thuyết mờ trực cảm, tác giả đã trình bày chất lọc:

- Hệ thống một số kiến thức cơ bản của lý thuyết mờ và lý thuyết mờ trực cảm.

- Trình bày một phân lớp các toán tử lôgic t-chuẩn mờ trực cảm và t-đối chuẩn mờ trực cảm, xây dựng một phân lớp mới của một nhóm các toán tử t-chuẩn mờ trực cảm và t-đối chuẩn mờ trực cảm dựa trên kiến thức t-chuẩn mờ và t-đối chuẩn mờ.

- Trình bày lý thuyết biểu diễn của một lớp các toán tử lôgic mờ trực cảm: toán tử phủ định mờ trực cảm, một lớp toán tử t-chuẩn mờ trực cảm, một lớp toán tử t-đối chuẩn mờ trực cảm.

Trong luận văn, tác giả đã sử dụng nhiều kết quả được công bố trên các tạp chí, hội thảo và một số kết quả đã in trong Preprint-Viện Toán học Việt Nam. Trong quá trình thực hiện luận văn, ngoài việc nghiên cứu lý thuyết mờ trực cảm, tác giả cũng quan tâm tìm hiểu, tham gia viết báo cáo các nội dung gần với nội dung luận văn như: tập mờ bức tranh (picture fuzzy sets); quan hệ mờ bức tranh (picture fuzzy relations) [18]. Trong tương lai, tác giả tiếp tục nghiên cứu về lý thuyết mờ trực cảm, tập trung cho các lớp toán tử lôgic mờ trực cảm ngoài các lớp đã trình bày như: không liên tục, không lũy linh... Tác giả hi vọng xa hơn, có thể phát triển nghiên cứu sang các toán tử mờ bức tranh.

Mặc dù tác giả rất cố gắng nhưng luận văn không tránh khỏi những khiếm khuyết, sai sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô và các bạn để luận văn này được hoàn thiện hơn. Tác giả xin trân trọng cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Bùi Công Cường (2008), *Cấu trúc đại số của tập mờ*, Bài giảng tại Đại học Bách khoa Hà Nội, Hà Nội.

[2] Bùi Công Cường, Nguyễn Doãn Phước (chủ biên) (2006), *Hệ mờ, mạng nơron và ứng dụng - Xuất bản lần 2*, Nhà xuất bản Khoa học, Kĩ thuật, Hà Nội.

[3] B.C. Cuong (May 2013), "Picture fuzzy sets - First reuslts. Part 1", Seminar *Neuro-Fuzzy Systems with Applications*, Preprint 03/2013, Institute of Mathematics, Hanoi - Vietnam.

[4] B.C. Cuong (June 2013), "Picture fuzzy sets - First reuslts. Part 2", Seminar *Neuro-Fuzzy Systems with Applications*, Preprint 04/2013, Institute of Mathematics, Hanoi -Vietnam.

[5] B.C. Cuong, Nguyen Quang Thang, Roan Thi Ngan, Nguyen Duc Hai (June 2014), "A remark on some classes of t-representable intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms", Institute of Mathematics Vietnam Academy of Science and Technology, Seminar *Neuro-Fuzzy Systems with Applications*, Preprint, Hanoi - Vietnam.

[6] B.C. Cuong and V. Kreinovich (2013), "Picture Fuzzy Sets - a new concept for computational intelligence problems", in *Proceedings of the* 3^{rd} *World Congress on Information and Communication Technologies* (WICT 2013), Hanoi, Vietnam, IEEE CS, 2013 p. 1-6, ISBN 918-1-4799-3230-6.

[7] Erich Peter Klement and Radco Mesiar (2005), *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, 1st Edition, Elsevier.

[8] Glad Deschrijver, Chris Cornelis, and Etienne E. Kerre (February 2004), "On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t- Norms and t-Conorms", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 12, No. 1.

[9] Glad Deschrijver, Etienne E. Kerre (2003), "On the relationship between some extenstions of fuzzy set theory", *Fuzzy Sets and Systems* , vol. 133, n.2, pp. 227-235.

[10] Hung T. Nguyen, Elbert A. Walker (2005), *First Course in Fuzzy Logic* - second edition, Department of Mathematical Sciences New Mexico State University Las Cruces, New Mexico. Chapman and hall/crc, Boca Raton London NewYork Washington, D.C..

[11] J. Goguen (1967), "L-fuzzy sets", J. Math. Anal. Appl., vol. 18, pp. 145-174.

[12] K.T. Atanassov (1986), "Intiuitonistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 20, pp. 87-96.

[13] K.T. Atanassov (1989), "More on intiuitonistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 33, pp. 37-45.

[14] K.T. Atanassov (1994), "New Operations defined over the intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and SystemsMath*, Reseach Lab., IPACT. Sofia, Bulgaria, vol. 61, pp. 137-142, North-Holland.

[15] Carol L. Walker, Elbert A. Walker (2005), "The algebra of fuzzy truth values", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 149, pp. 309-347.

[16] L.A. Zadeh (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353.

[17] L.A. Zadeh (1975), "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", *Information. Science*, vol. 8, pp. 199-249.

[18] Pham Hong Phong, Dinh Trong Hieu, Roan Thị Ngan, Pham Thi Them (2014), *Some Compositions of Picture Fuzzy Relations*, FAIR, Thai Nguyen, Vietnam.

[19] Zeshui Xu and Xiaoqiang Cai (2012), "Intuitionistic Fuzzy Information Aggregation", *Theory and Applications*, Science Press Beijing.