Mục lục

Lời nói đầu

Giải tích phi tuyến ứng dụng và những lĩnh vực liên quan đến tối ưu liên tục và bất đẳng thức biến phân đã trải qua quá trình hoàn thiện hơn ba mươi năm. Trong đó, giải tích lồi là một lĩnh vực bao gồm nhiều vấn đề trong toán học và ứng dụng của nó đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển này. Định lý tách các tập lồi và biến đổi liên hợp Legendre - Fenchel là những khái niệm cơ bản có đóng góp quan trọng cho quá trình phát triển trên. Có hai khái niệm quan trọng khác góp phần làm cho giải tích lồi trở thành công cụ mạnh, mà thường xuyên bị giấu kín, là khái niệm về nón tiệm cận và hàm tiệm cận.

Trong quá trình tìm cực tiểu của bài toán tối ưu ta phải đối mặt với trường hợp tính compact bị vi phạm và tồn tại dãy không bị chặn. Điều ta quan tâm tới là biểu diễn của các dãy này ở vô cùng. Từ đây dẫn đến các khái niệm nón tiệm cận và hàm tiệm cận. Trong một cuốn sách được công bố vào năm 2000, A. Auslender và M. Teboulle [3] đã đưa ra những kết quả về nón tiệm cận và hàm tiệm cận. Các tác giả đã chỉ ra những tính chất quan trọng và thú vị của chúng trong cả hai trường hợp lồi và không lồi.

Luận văn này trình bày một số kết quả chính của Chương 2 "Nón tiệm cận và hàm tiệm cận" ("*Asymptotic cones and functions*") trong cuốn chuyên khảo [3] của A. Auslender và M. Teboulle đã được nhắc tới ở trên. Các đối tượng được xét ở đây là nón tiệm cận, hàm tiệm cận và áp dụng của chúng để xét sự tồn tại nghiệm trong bài toán tối ưu.

Luận văn gồm ba chương.

Chương 1 "Kiến thức chuẩn bị" đề cập tới một số khái niệm cơ bản trong giải tích lồi. Do phần này chỉ mang tính hỗ trợ, nên sẽ không chứng minh các kết quả đưa ra ở đây.

Chương 2 "Hàm tiệm cận" trình bày quá trình xây dựng khái niệm nón tiệm cận và hàm tiệm cận thông qua trên đồ thị của nó. Sử dụng công cụ của giải tích cổ điển và một số khái niệm hình học cho ta biểu diễn tiệm cận của một tập, một hàm và các phép toán cảm sinh khác, và cho phép nhận được kết quả riêng thú vị trong cả hai trường hợp lồi và không lồi.

Chương 3 "Ứng dụng của hàm tiệm cận" giới thiệu một số ứng dụng của hàm tiệm cận và trình bày cụ thể hơn áp dụng hàm tiệm cận để nghiên cứu sự tồn tại và ổn định cho bài toán cực tiểu lồi.

Do thời gian có hạn nên luận văn mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự đóng góp của các thầy cô và bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Luận văn được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới cô Trương Xuân Đức Hà đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô và cán bộ công nhân viên của Viện Toán học đã quan tâm giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện.

Hà Nội, ngày 15 tháng 08 năm 2014

Hoàng Thị Ánh Nguyệt

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclidean n chiều
$\overline{\mathbb{R}}$	tập số thực mở rộng
${\mathbb{R}^n}_+$	orthant dương
$\mathbb{B}$	hình cầu đơn vị đóng
$\operatorname{aff} C$	bao affine của tập C
$\operatorname{conv} C$	bao lồi của tập C
$\operatorname{int} C$	phần trong của tập C
$\operatorname{ri} C$	phần trong tương đối của tập C
$\operatorname{cl} C$	bao đóng của tập C
$\operatorname{bd} C$	biên của tập C
$N_C(x)$	nón pháp tuyến của C tại x
$\operatorname{pos} C$	nón dương sinh bởi C
$\operatorname{ext} C$	tập các điểm cực biên của C
$\operatorname{extray} C$	tập các phương cực biên của C
$\operatorname{dom} f$	miền hữu hiệu của f
$\operatorname{epi} f$	tập trên đồ thị của f
$\operatorname{lev}(f, \lambda)$	tập mức của f (với mức là λ)
δ_C	hàm chỉ của tập C
σ_C	hàm tựa của tập C
C_∞	nón tiệm cận của tập C
f_∞	hàm tiệm cận của f
$\mathcal{C}_f$	không gian bất biến của f
$\mathcal{K}_f$	nón tiệm cận của f

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số định nghĩa và kết quả chính của giải tích lồi sẽ được sử dụng ở các chương sau. Nội dung của nó chủ yếu lấy từ [1] và [2].

Một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi

Cho $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ là không gian Euclidean n chiều. *Tích vô hướng* trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Hình cầu đơn vị đóng trong $\mathbb{R}^n$ kí hiệu là

$$\mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x\| \leq 1\}.$$

Định nghĩa 1.1. Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là *lồi* nếu $\forall\, a, b \in C$ thì *đoạn thẳng*

$$[a, b] := \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

nối hai điểm a, b cũng nằm trong C.

Một số phép toán về tập lồi: Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi. Tích Descartes của một số hữu hạn tập lồi cũng là tập lồi. Tổng của một số hữu hạn các tập lồi là tập lồi. Ảnh và nghịch ảnh của một tập lồi qua ánh xạ tuyến tính là tập lồi.

Mặt phẳng, đoạn thẳng, đường thẳng, hình cầu trong $\mathbb{R}^n$ là những ví dụ quen thuộc về tập lồi. Trong khi đó mặt cầu không phải là tập lồi.

Định nghĩa 1.2. Tập $K \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *nón* nếu $tx \in K \ , \forall x \in K, \ t \geq 0$. Nếu K là tập lồi thì nó sẽ là *nón lồi.*
Một ví dụ quan trọng về nón lồi trong $\mathbb{R}^n$ là nón orthant dương

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x | \ x_i \geq 0, \, i = 1, \ldots, n\}.$$

Định nghĩa 1.3. Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi khác rỗng. Tập

$$N_C(\bar{x}) := \{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \ , \forall x \in C\}$$

được gọi là *nón pháp tuyến* của C tại $\bar{x} \in C$.

Ví dụ 1.4. (a) Với $C = \mathbb{R}^2_+$ ta có

$$N_C((0,0)) = \{(x, y) | \, x, \, y \leq 0\}.$$

(b) Với tập $C = \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\| \leq 1\}$ ta có nón pháp tuyến của C tại $(0, 0)$ chính là vectơ không, và nón pháp tuyến tại điểm $(0, 1)$ là

$$N_{\mathbb{B}}((0,1)) = \{(0, y) | \, y \geq 0\}.$$

Định nghĩa 1.5. Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là khác rỗng. Tập

$$\operatorname{pos} C := \{\lambda x \mid x \in C, \lambda \geq 0\}$$

được gọi là *nón dương* (hay *bao nón*) sinh bởi tập C và là nón nhỏ nhất chứa tập C.

Định nghĩa 1.6. Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là *đa tạp affine* (*tập affine* hay *không gian con affine*) nếu $\forall\, a, b \in C$ thì *đường thẳng*

$$L(a, b) := \{ta + (1-t)b \mid t \in \mathbb{R}\}$$

đi qua a, b đều nằm trong C.

Không gian $\mathbb{R}^n$, điểm, đường và những siêu phẳng trong $\mathbb{R}^n$ là những đa tạp affine. Trong khi đó, hình cầu, hình đa giác nói chung không phải là tập affine. Một tập affine là đóng và lồi. Rõ ràng tập affine là trường hợp riêng của tập lồi.

Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$, kí hiệu

$$\operatorname{conv} C := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i | \ x_i \in C,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\},$$

$$\operatorname{aff} C := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i | \ x_i \in C,\ t_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

tương ứng là *bao lồi* và *bao affine* của C. Dễ thấy, $\operatorname{conv} C$ là giao của tất cả các tập lồi chứa C và là tập lồi nhỏ nhất chứa C. Bao affine của C là giao của tất cả các đa tạp affine chứa C. Với mọi tập $C \neq \emptyset$, $\operatorname{aff} C$ bao giờ cũng tồn tại và duy nhất.

Định nghĩa 1.7. Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi. *Phần trong* và *bao đóng* của C cũng là tập lồi và được ký hiệu

$$\begin{aligned} \operatorname{int} C &:= \Big\{ x \in \mathbb{R}^n | \, \exists \, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } x + \varepsilon \mathbb{B} \subset C \Big\}, \\ \operatorname{cl} C &:= \bigcap_{\varepsilon > 0} (C + \varepsilon \mathbb{B}). \end{aligned}$$

Một điểm a của tập lồi C gọi là *điểm trong tương đối* nếu $\forall \, x \in \mathbb{R}^n$ đều có một số $\varepsilon > 0$ để

$$a + \varepsilon(x - a) \in C.$$

Tập các điểm trong tương đối của C được kí hiệu $\operatorname{ri} C$, cũng là tập lồi.

Định nghĩa 1.8. Một tập con lồi F của một tập lồi C gọi là một *diện* của C nếu $x, y \in C$ mà $(1 - \lambda x) + \lambda y \in F$, $0 < \lambda < 1$ thì $[x, y] \subset F$, nghĩa là nếu một đoạn thẳng bất kỳ thuộc C có một điểm trong tương đối thuộc F thì cả đoạn thẳng ấy phải nằm trọn trong F.

Một diện có số chiều bằng 0 gọi là một *điểm cực biên* của C. Nói cách khác, đó là một điểm thuộc C mà nó không thể là một điểm trong tương đối của một đoạn thẳng bất kỳ nào với hai đầu mút khác nhau thuộc C. *Tập các điểm cực biên* của C ký hiệu là $\operatorname{ext} C$. Ví dụ như trong một đa giác lồi thì đỉnh của nó chính là các điểm cực biên.

Nếu một tập lồi C có diện là một nửa đường thẳng thì vectơ chỉ phương của nửa đường thẳng này gọi là một *phương cực biên. Tập các phương cực biên* của C kí hiệu là $\operatorname{extray} C$. Chẳng hạn nón orthant dương $\mathbb{R}^2_+$ có duy nhất một điểm cực biên là $(0, 0)$ và hai phương cực biên, đó là các vectơ đơn vị $e^1 = (1, 0)$ và $e^2 = (0, 1)$.

Tập lồi có thể biểu diễn được qua các điểm cực biên và phương cực biên.

Định lý 1.9. (Định lý Krein - Milman)

Một tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng và không chứa đường thẳng nào thì

$$C = \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext} C \cup \operatorname{extray} C\right).$$

Khi C là một tập compact, lúc đó $\operatorname{ext} C \neq \emptyset$. Tập C có thể biểu diễn được dưới dạng $C = \operatorname{conv} \operatorname{ext} C$.

Một định lý rất quan trọng của giải tích lồi thường được sử dụng trong lý thuyết tối ưu đó là *định lý tách các tập lồi. Siêu phẳng*

$$\langle t, x\rangle = \alpha,\ t \neq 0$$

được gọi là *tách* hai tập $C,\ D$ nếu

$$\sup_{x\in C}\langle t, x\rangle \le \alpha \le \inf_{y\in D}\langle t, y\rangle;$$

tách hẳn hai tập $C, D \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$\sup_{x\in C}\langle t, x\rangle < \alpha < \inf_{y\in D}\langle t, y\rangle.$$

Định lý 1.10. (Định lý tách thứ nhất)

Hai tập lồi C, D không rỗng mà rời nhau thì có một siêu phẳng tách chúng.

Định lý 1.11. (Định lý tách thứ hai)

Hai tập lồi đóng C, D không rỗng mà rời nhau và một trong hai tập ấy compact thì có một siêu phẳng tách hẳn chúng.

Ta kí hiệu $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ là tập số thực mở rộng. Đặc biệt trong bài toán tối ưu ta thường làm việc với mở rộng của hàm số thực. Nghĩa là các hàm lấy giá trị trong $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Trong mọi tính toán trên *tập số thực mở rộng* $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ ta sẽ theo các quy ước thông thường

$$\infty + \infty = \infty; \quad \alpha.\infty = \infty, \forall\, \alpha \geq 0; \quad \inf \emptyset = \infty; \quad \sup \emptyset = -\infty.$$

Với hàm $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, ta định nghĩa các tập

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} f &:= \{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) < +\infty\}, \\ \operatorname{epi} f &:= \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\, f(x) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

lần lượt được gọi là *miền hữu hiệu* và *trên đồ thị* của f. Ngoài ra, với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta gọi *tập mức* của hàm f (với mức α) là

$$\operatorname{lev}(f, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) \leq \alpha\}.$$

Có thể thấy mối tương quan của tập mức và trên đồ thị của f đó là

$$(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f \Longleftrightarrow x \in \operatorname{lev}(f, \alpha).$$

Hàm f được gọi là *chính thường* nếu

$$\operatorname{dom} f \neq \emptyset \text{ và } f(x) > -\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Định nghĩa 1.12. Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là *nửa liên tục dưới* tại x nếu

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y)$$

và nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}^n$ nếu f nửa liên tục dưới với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Định lý sau nêu một số tính chất đặc trưng của hàm nửa liên tục dưới.

Định lý 1.13. *Hàm* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *thì các phát biểu sau là tương đương*

(a) f *nửa liên tục dưới trên* $\mathbb{R}^n$.

(b) *Tập trên đồ thị* $\operatorname{epi} f$ *là đóng trong* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

(c) *Tập mức* $\operatorname{lev}(f, \alpha)$ *là đóng trong* $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.14. Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là

- *lồi* nếu

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1];$$

- *lồi chặt* nếu

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ x \neq y, \forall t \in (0, 1);$$

- *lõm* nếu $-f$ là lồi;

- *affine* nếu f vừa là lồi vừa là lõm.

Ví dụ 1.15. Một số hàm lồi

- Hàm affine $f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha$ với $c \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Hàm chỉ* của tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$, trong đó

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 \ \text{ nếu } x \in C, \\ +\infty \ \text{ nếu } x \notin C. \end{cases}$$

- *Hàm tựa* của tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$, trong đó

$$\sigma_C(d) := \sup\{\langle x, d\rangle \mid x \in C\}.$$

Chương 2

Hàm tiệm cận

Trong chương này, chúng ta sẽ phân tích sự phát sinh của hàm tiệm cận. Từ một tập con trong $\mathbb{R}^n$ ta quan tâm tới biến thiên của nó ở vô cùng. Chính điều này sẽ dẫn đến các khái niệm về nón tiệm cận và hàm tiệm cận thông qua tập trên đồ thị của nó.

2.1 Nón tiệm cận

Một dãy $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ gọi là hội tụ tới x nếu

$$\|x_k - x\| \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Nhắc lại rằng, mỗi dãy trong $\mathbb{R}^n$ hội tụ tới x khi và chỉ khi nó bị chặn và điểm tụ x là duy nhất. Điều mà ta quan tâm tới là giải quyết vấn đề trong trường hợp dãy $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ không bị chặn. Trước tiên xét

$$d_k := \frac{x_k}{\|x_k\|}, \;\text{ với } x_k \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Từ giải tích cổ điển, áp dụng định lý Bolzano - Weierstrass có thể lấy một dãy hội tụ $d = \lim\limits_{k \in \mathbb{K}} d_k$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$, $d \neq 0$. Giả sử dãy $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mà

$\|x_k\| \to +\infty$. Khi đó

$$\exists\, t_k := \|x_k\|\,, k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N} \text{ sao cho } \lim_{k\in\mathbb{K}} t_k = +\infty \text{ và } \lim_{k\in\mathbb{K}} \frac{x_k}{t_k} = d.$$

Điều này dẫn đến một số khái niệm sau.

Định nghĩa 2.1. Dãy $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ được gọi là hội tụ về phương $d \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$\exists\, \{t_k\} \text{ với } t_k \to +\infty \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d.$$

Định nghĩa 2.2. Cho $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ ta ký hiệu *nón tiệm cận* của tập C là

$$C_\infty := \left\{ d \in \mathbb{R}^n |\; \exists\, t_k \to +\infty, \exists\, x_k \in C \text{ với } \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d \right\}$$

đó là tập các vectơ $d \in \mathbb{R}^n$, là giới hạn theo hướng của những dãy $\{x_k\} \subset C$. Tương tự một định nghĩa khác cho nón tiệm cận

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n |\; \forall\, x \in C, \exists\, d_k \in \mathbb{R}^n, d_k \to d, \exists\, s_k \to \infty \text{ sao cho } x + s_k d_k \in C\}.$$

Từ định nghĩa suy ra một số tính chất cơ bản cho nón tiệm cận.

Mệnh đề 2.3. *Một tập $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ thì*

(a) *C_∞ là nón đóng.*

(b) $(\operatorname{cl} C)_\infty = C_\infty$.

(c) *C là nón thì $C_\infty = \operatorname{cl} C$.*

Chứng minh. (a) Lấy $\lambda > 0$, giả sử $d \in C_\infty$, từ định nghĩa của nón tiệm cận ta có

$$\exists\, \{x_k\} \subset C,\; \exists\, t_k \to \infty \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d \in C_\infty.$$

Xét

$$\lambda d = \lambda \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = \lim_{k\to\infty} \lambda \frac{x_k}{t_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\left(\dfrac{t_k}{\lambda}\right)}.$$

Do $t_k \to \infty$, và $\lambda > 0$ suy ra $\dfrac{t_k}{\lambda} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Vì thế $\lambda d \in C_\infty$ hay C_∞ là nón.

Giả sử $d_k \in C_\infty$, $d_k \to d$. Theo định nghĩa của nón tiệm cận ta có được

$$\exists\, x_k \in C, \exists\, t_k \to +\infty \text{ mà } \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d_k \in C_\infty.$$

Khi $k \to \infty$ thì $d_k \to d$, ta được

$$\frac{x_k}{t_k} \xrightarrow{k\to\infty} d.$$

Suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d \text{ với } x_k \in C,\ t_k \to \infty.$$

Vậy $d \in C_\infty$ hay C_∞ là đóng. Do đó C_∞ là nón đóng.

(b) Vì $C \subset \operatorname{cl} C$ suy ra $C_\infty \subset (\operatorname{cl} C)_\infty$.

Ngược lại, giả sử $d \in (\operatorname{cl} C)_\infty$ tức là

$$\exists\, t_k \to +\infty, \exists\, x_k \in \operatorname{cl} C \text{ sao cho } \frac{x_k}{t_k} \to d.$$

Do đó $\forall\, k,\ \exists\, y_k \in C$ sao cho $\|y_k - x_k\| \le \dfrac{1}{t_k}$. Khi $k \to \infty$, xét $\dfrac{y_k}{t_k}$ ta được

$$\frac{y_k}{t_k} = \frac{y_k - x_k + x_k}{t_k} = \frac{\|y_k - x_k\|}{t_k} + \frac{x_k}{t_k} \le \frac{1}{t_k^2} + d \to d.$$

Suy ra $d \in C_\infty$. Vì vậy nên $C_\infty = (\operatorname{cl} C)_\infty$.

(c) Ta sẽ chỉ ra $\operatorname{cl} C \subset C_\infty$. Đầu tiên xét trường hợp $x \in C$. Đặt

$$t_k = k\,;\ x_k = kx \text{ với } k = 1, 2 \ldots$$

ta sẽ được $\dfrac{x_k}{t_k} = x$ suy ra $x \in C_\infty$.

Trường hợp $x \in \operatorname{cl} C$, như vậy sẽ tồn tại $y_k \in C$ sao cho $y_k \to x$. Đặt

$$t_k = k\,;\ x_k = ky_k \text{ với } k = 1, 2\ldots$$

Xét $\dfrac{x_k}{t_k} = \dfrac{ky_k}{k} = y_k \to x$. Do đó $x \in C_\infty$. Suy ra $\operatorname{cl} C \subset C_\infty$.

Ngược lại, giả sử $d \in C_\infty$, theo (b) ta có $d \in (\operatorname{cl} C)_\infty$. Tức là

$$\exists\, t_k \to +\infty,\ \exists\, x_k \in \operatorname{cl} C \text{ sao cho } \frac{x_k}{t_k} \to d.$$

Mặt khác, C là nón, nên $\operatorname{cl} C$ cũng là nón suy ra

$$\frac{x_k}{t_k} \in \operatorname{cl} C, \forall\, k.$$

Do $\operatorname{cl} C$ là tập đóng, nên $\dfrac{x_k}{t_k} \to d \in \operatorname{cl} C$. Vì thế ta có được $C_\infty \subset \operatorname{cl} C$. Vậy $C_\infty = \operatorname{cl} C$. □

Mệnh đề 2.4. *Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn khi và chỉ khi $C_\infty = \{0\}$.*

Chứng minh. Tập C là bị chặn thì theo Định nghĩa 2.2 ta có nón tiệm cận của C chỉ là điểm gốc 0.

Ngược lại, bằng phản chứng giả sử rằng tập C không bị chặn, tức là

$$\exists\, \{x_k\} \subset C, \text{ với } x_k \neq 0, \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ thì } t_k := \|x_k\| \to \infty.$$

Ta được dãy vectơ

$$d_k = \frac{x_k}{t_k} \in \{d : \|d\| = 1\}\,.$$

Lấy giới hạn dãy $\{d_k\}$ ta có

$$\lim_{k\in\mathbb{K}} d_k = \lim_{k\in\mathbb{K}} \frac{x_k}{t_k} = \lim_{k\in\mathbb{K}} \frac{x_k}{\|x_k\|}, \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$\lim_{k\to\infty} d_k = d,\ \|d\| = 1,\ k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N}.$$

Từ định nghĩa nón tiệm cận ta có $d \in C_\infty$, mặt khác theo giả thiết $C_\infty = \{0\}$, cho nên $d = 0$. Khi đó

$$\lim_{k\in K} \frac{x_k}{\|x_k\|} = 0 \text{ hay } x_k \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

mâu thuẫn với điều giả sử là $x_k \neq 0$. Vậy tập C là bị chặn. □

Định nghĩa 2.5. Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập khác rỗng và kí hiệu

$$C^1_\infty := \left\{ d \in \mathbb{R}^n |\ \forall\, t_k \to +\infty, \exists\, x_k \in C \text{ với } \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d \right\}.$$

Ta nói tập C là *chính quy tiệm cận* nếu $C_\infty = C^1_\infty$.

Mệnh đề 2.6. *Tập C là một tập lồi khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ thì C là chính quy tiệm cận.*

Chứng minh. Từ định nghĩa của C^1_∞ và C_∞ luôn có được bao hàm thức $C^1_\infty \subset C_\infty$.

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, giả sử rằng $d \in C_\infty$. Từ định nghĩa của nón tiệm cận cho một tập C khác rỗng ta có

$$\exists\ \{x_k\} \subset C,\ \exists\, s_k \to \infty \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{s_k} = d.$$

Lấy $x \in C$ đặt $d_k = \dfrac{x_k - x}{s_k}$ thì

$$\lim_{k\to\infty} d_k = d \text{ với } x + s_k d_k \in C.$$

Dễ thấy

$$d_k = \frac{x_k - x}{s_k} = \frac{x_k}{s_k} - \frac{x}{s_k} \xrightarrow{k\to\infty} d.$$

Khi s_k càng lớn thì $\frac{x}{s_k} \to 0$ nên $d - \frac{x}{s_k}$ dần tới vectơ d. Tiếp tục, chọn dãy $\{t_k\}$ tùy ý sao cho

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty.$$

Cố định m, tồn tại hàm k phụ thuộc m với

$$\lim_{m\to\infty} k(m) = +\infty \text{ và } t_m \leq s_{k(m)}.$$

Đặt

$$\begin{aligned} x'_m &:= x + t_m d_{k(m)} \\ &= x + t_m \frac{x_{k(m)} - x}{s_{k(m)}} \\ &= \left(1 - \frac{t_m}{s_{k(m)}}\right) x + \frac{t_m}{s_{k(m)}} x_{k(m)}. \end{aligned}$$

Do tính lồi của tập C và $t_m \leq s_{k(m)}$ tức là $\frac{t_m}{s_{k(m)}} \leq 1$ có ngay $x'_m \in C$. Chuyển qua giới hạn được

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x'_m}{t_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{x + t_m d_{k(m)}}{t_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{x}{t_m} + d_{k(m)} \to d.$$

Bởi vì

$$d = \lim_{m\to\infty} \frac{x'_m}{t_m} \text{ với } x'_m \in C,\ \forall\, t_m \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$$

nên

$$d \in C^1_\infty \text{ tức là } C_\infty \subset C^1_\infty.$$

Vậy $C_\infty = C^1_\infty$ hay tập C là chính quy tiệm cận. □

Lưu ý rằng một tập có thể không lồi nhưng vẫn là chính quy tiệm cận. Dễ dàng kiểm chứng điều này qua ví dụ sau. Với tập C không lồi được cho bởi $C := S + K$ mà S là compact và K là một nón lồi đóng. Từ tính compact của tập S suy ra nó bị chặn. Lúc đó $S_\infty = \{0\}$ mà $K_\infty = K$ nên $C_\infty = C^1_\infty$. Vậy tính lồi là điều kiện đủ nhưng không phải là điều kiện cần cho cho tính chính quy tiệm cận.

Mệnh đề 2.7. *Một tập lồi C khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, ký hiệu tập chuẩn hóa*

$$C_N := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists \{x_k\} \subset C, \|x_k\| \to +\infty, \text{ với } d = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|x_k\|} \right\}.$$

Khi đó $C_\infty = \operatorname{pos} C_N$, *với* $\operatorname{pos} C = \{\lambda x |\, x \in C, \lambda \geq 0\}$.

Chứng minh. Giả sử $\lambda d \in \operatorname{pos} C_N$, với $d \in C_N$, $\lambda \geq 0$. Vì $d \in C_N$ nên

$$\exists \{x_k\} \subset C, \|x_k\| \to +\infty \text{ và } d = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|x_k\|}, \|d\| = 1.$$

Lúc đó

$$\lambda d = \lambda \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|x_k\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\frac{\|x_k\|}{\lambda}}.$$

Đặt $\dfrac{\|x_k\|}{\lambda} = t_k$ lấy qua giới hạn được

$$t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \text{ (vì } \|x_k\| \to +\infty).$$

Do đó $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{t_k} = d$, tức là $d \in C_\infty$. Suy ra $\lambda d \in C_\infty$ nghĩa là $\operatorname{pos} C_N \subset C_\infty$.

Ngược lại giả sử rằng $0 \neq d \in C_\infty$, theo định nghĩa nón tiệm cận của tập C tồn tại $t_k \to \infty$, $x_k \in C$ sao cho

$$d = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\|x_k\|}{t_k} \cdot \frac{x_k}{\|x_k\|} \text{ với } \|x_k\| \to +\infty.$$

Khi $k \to \infty$ thì dãy $\left\{ \dfrac{\|x_k\|}{t_k} \right\}$ là một dãy bị chặn không âm, theo nguyên lý Bolzano - Weierstrass nên nó phải chứa một dãy con hội tụ, nghĩa là

$$\exists \left\{ \frac{\|x_k\|}{t_k} \right\}_{k\in K} \text{ với } K \subset \mathbb{N} \text{ và } \lim_{k\in K} \frac{\|x_k\|}{t_k} = \lambda \geq 0,$$

việc cố định k ở đây để chỉ ra dãy con hội tụ. Mặt khác $\left\| \dfrac{x_k}{\|x_k\|} \right\| = 1$ nên $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{\|x_k\|} \in C_N$, kéo theo $d \in \operatorname{pos} C_N$. Vì vậy $C_\infty = \operatorname{pos} C_N$. $\square$

Sau đây là một số biểu diễn của nón tiệm cận cho tập lồi.

Mệnh đề 2.8. *Một tập lồi C khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó nón tiệm cận C_∞ là nón lồi đóng. Ta định nghĩa các tập*

$$
\begin{aligned}
D(x) &:= \{d \in \mathbb{R}^n |\, x + td \in \operatorname{cl} C, \forall\, t > 0\}\ \forall\, x \in C,\\
E &:= \{d \in \mathbb{R}^n |\, \exists\, x \in C \text{ sao cho } x + td \in \operatorname{cl} C, \forall\, t > 0\},\\
F &:= \{d \in \mathbb{R}^n |\, d + \operatorname{cl} C \subset \operatorname{cl} C\}.
\end{aligned}
$$

Khi đó $D(x)$ không phụ thuộc vào x, có thể biểu thị nó bởi D và $C_\infty = D = E = F$.

Chứng minh. Do C là tập lồi nên C_∞ là nón lồi đóng. Ta sẽ chứng minh ba công thức trên là tương đương theo các bước sau:

Đầu tiên ta chứng minh

$$C_\infty = D(x).$$

Lấy $d \in D, x \in C$, với mọi $t > 0$ ta có

$$x(t) = x + td \in \operatorname{cl} C.$$

Cho $t \to \infty$ nhận được $\dfrac{x(t)}{t} \to d$, trong đó $x(t) \in \operatorname{cl} C$. Từ định nghĩa nón tiệm cận ta có ngay $d \in (\operatorname{cl} C)_\infty$ hay $d \in C_\infty$ (vì $(\operatorname{cl} C)_\infty = C_\infty$). Do đó $D \subset C_\infty$

Dễ dàng kiểm chứng được $C_\infty \subset D$. Giả sử $d \in C_\infty,\ x_k \in C,\ t > 0$. Từ Định nghĩa 2.2 có ngay

$$\exists\, t_k \to +\infty,\ \exists\, x_k \in C \text{ sao cho } d = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k}\cdot$$

Lấy $x \in C$, đặt $d_k = \dfrac{x_k - x}{t_k}$ ta được

$$d = \lim_{k\to\infty} d_k,\ x + t_k d_k \in C.$$

Chọn k đủ lớn sao cho $t \le t_k$. Lúc đó

$$x + td_k = x + \frac{tx}{t_k} - \frac{tx}{t_k} + td_k = \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) x + \frac{t}{t_k}(x + t_k d_k).$$

Kết hợp với tính lồi của C suy ra $x + td_k \in C$. Dễ dàng kiểm tra được $\lim\limits_{k\to\infty} x + td_k = x + td$, kéo theo $d \in D$, do đó chứng minh được bao hàm thức $C_\infty \subset D$. Vì vậy nên $C_\infty = D$. Tiếp theo ta chứng minh

$$D(x) = E = C_\infty.$$

Theo định nghĩa của $D(x)$ và E, ta có ngay bao hàm thức $D(x) \subset E$. Mặt khác ở trên ta đã chứng minh được $D(x) = C_\infty$ để tiếp tục cần chứng tỏ $E \subset C_\infty$. Lấy $d \in E$ và $x \in C$ sao cho

$$x(t) := x + td \in \operatorname{cl} C,\ \forall\, t > 0.$$

Cho $t \to \infty$ thì

$$\frac{x(t)}{t} \to d.$$

Theo định nghĩa của nón tiệm cận suy ra $d \in (\operatorname{cl} C)_\infty$ mặt khác $C_\infty = (\operatorname{cl} C)_\infty$ nên suy ra $d \in C_\infty$ tức là $E \subset C_\infty$. Vậy $D(x) = E = C_\infty$.

Rõ ràng, $D(x)$ là tập các vectơ d trong $\mathbb{R}^n$, mà $x + td \in \operatorname{cl} C,\ \forall\, x \in C$, do đó $D(x)$ không phụ thuộc vào x. Cho nên có thể viết thành

$$D(x) = D = C_\infty = E.$$

Cuối cùng ta chứng minh rằng

$$C_\infty = F.$$

Sử dụng biểu diễn $C_\infty = D$. Với $t = 1$ và $d \in C_\infty$ thì $\exists\, x \in C$ sao cho

$$x + td \in \operatorname{cl} C$$

do vậy

$$d + \operatorname{cl} C \subset \operatorname{cl} C.$$

Từ định nghĩa của tập F suy ra

$$d \in F, \ \text{ nghĩa là } C_\infty \subset F.$$

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại $F \subset C_\infty$, lấy $d \in F$, bằng mô tả của tập F luôn có

$$d + \operatorname{cl} C \subset \operatorname{cl} C,$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } 2d + \operatorname{cl} C &= d + (d + \operatorname{cl} C), \\ &\subset d + \operatorname{cl} C. \end{aligned}$$

Như vậy $2d + \operatorname{cl} C \subset \operatorname{cl} C$, khái quát hóa quá trình này lên ta được

$$\operatorname{cl} C + md \subset \operatorname{cl} C,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Do đó với $x \in C$ ta có thể biểu diễn dưới dạng

$$d_m := x + md \in \operatorname{cl} C,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Khi $m \to \infty$ nhận được $\dfrac{d_m}{m} \to d$. Áp dụng định nghĩa nón tiệm cận suy ra

$$d \in C_\infty \text{ hay } F \subset C_\infty.$$

Vì vậy $F = C_\infty$. $\square$

Tóm lại ba công thức trên là tương đương và là biểu diễn thay thế được cho C_∞. Khi C là lồi đóng thì C_∞ còn được gọi là *nón các phương vô tận* (*phương lùi xa*). Một công thức biểu thị khác của nón tiệm cận trong trường hợp C là tập lồi đóng ký hiệu là

$$C_\infty := \bigcap_{t>0} t^{-1}(C - x),\ \forall\, x \in C.$$

Dưới đây trình bày một số kết quả của nón tiệm cận khi xét một tập là lồi, đóng trong $\mathbb{R}^n$.

Mệnh đề 2.9. *Với mỗi tập lồi đóng khác rỗng C trong $\mathbb{R}^n$ thì $C = C + C_\infty$.*

Chứng minh. Trước tiên ta xét trường hợp tập C là bị chặn. Suy ra $C_\infty = \{0\}$ cho nên

$$C = C + \{0\} = C.$$

Vậy đẳng thức $C = C + C_\infty$ là đúng.

Trường hợp tập C là không bị chặn, ta luôn có

$$C \subset C + C_\infty.$$

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại ta giả sử $x \in C + C_\infty$. Do đó tồn tại $c \in C, d \in C_\infty$ sao cho $x = c + d$. Từ định nghĩa nón tiệm cận suy ra

$$\exists\, d_k \in C,\ \exists\, t_k \to \infty \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{t_k} = d.$$

Do tập C là lồi nên với k đủ lớn thì

$$\left(1 - \frac{1}{t_k}\right) c + \frac{1}{t_k} d_k \in C.$$

Lấy qua giới hạn ta có

$$\left(1-\frac{1}{t_k}\right)c+\frac{1}{t_k}d_k \xrightarrow{k\to\infty} c+d=x\in C.$$

Do đó $C + C_\infty \subset C$. Vì vậy nên $C = C + C_\infty$. □

Mệnh đề 2.10. *Với mỗi tập $C \subset \mathbb{R}^n$ lồi, đóng, khác rỗng và không chứa đường thẳng nào thì*

$$C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C) + C_\infty.$$

Chứng minh. Từ Định lý 1.9 ta có một tập lồi đóng, không chứa đường thẳng nào sẽ biểu diễn được bằng bao lồi của các điểm cực biên và các phương cực biên của nó. Với tập C đã cho thỏa mãn Định lý 1.9, có thể mô tả $x \in C$ bởi một tổ hợp lồi

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i d_i,$$

trong đó $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, với $\mathrm{x}_i \in \operatorname{ext} C$, $d_i \in \operatorname{extray} C$. Nghĩa là

$$d_i = e_i + v_i \text{ mà } e_i \in \operatorname{ext} C, v_i \in C_\infty.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i\left(e_i+v_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i e_i+\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i v_i. \end{aligned}$$

Do C lồi, x_i, $e_i \in \operatorname{ext} C$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$ nên x có dạng

$$x=\sum_{i=1}^{m}\beta_i y_i+\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i v_i,$$

trong đó $v_i \in C_\infty$, và $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum\limits_{i=k+1}^{m} \lambda_i e_i$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Lúc này

$$x \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C) + C_\infty, \text{ tức là } C \subset \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C) + C_\infty.$$

Ngược lại, $\operatorname{ext} C \subset C$, do đó $\operatorname{conv}(\operatorname{ext} C) \subset \operatorname{conv} C = C$ (C lồi nên $\operatorname{conv} C = C$). Sử dụng Mệnh đề 2.8 ta có bao hàm thức $C_\infty + \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C) \subset C$. Như vậy $C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C) + C_\infty$. □

Dưới đây là một số phép toán quan trọng của nón tiệm cận cho các tập tùy ý trong $\mathbb{R}^n$.

Mệnh đề 2.11. *Các tập $C_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ là tập chỉ số bất kỳ. Lúc đó*
(a) $(\bigcap\limits_{i\in I} C_i)_\infty \subset \bigcap\limits_{i\in I} (C_i)_\infty$ *khi* $\bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.
(b) $(\bigcup\limits_{i\in I} C_i)_\infty \supset \bigcup\limits_{i\in I} (C_i)_\infty$.
Bao hàm thức (a) trở thành đẳng thức khi C_i là các tập lồi đóng và có giao khác rỗng. Nếu I là một tập chỉ số hữu hạn thì bao hàm thức (b) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. (a) Để chứng minh khẳng định (a) ta sẽ sử dụng định nghĩa của nón tiệm cận và phép toán lấy giao của một họ bất kỳ các tập lồi đóng là lồi đóng.

Thật vậy, $\bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ suy ra $\exists (\bigcap\limits_{i\in I} C_i)_\infty$ và là tập đóng. Giả sử $d \in (\bigcap\limits_{i\in I} C_i)_\infty$ thì

$$\exists\, \mathrm{t}_k \to \infty,\ \exists\, x_k \in \bigcap_{i\in I} C_i \text{ sao cho } \frac{x_k}{\mathrm{t}_k} \xrightarrow{k\to\infty} d.$$

Do đó

$$\exists\, \mathrm{t}_k \to \infty,\ \exists\, x_k \in C_i,\ \forall\, i \in \mathrm{I} \text{ mà } \frac{x_k}{\mathrm{t}_k} \xrightarrow{k\to\infty} d,$$

tức là $d \in (C_i)_\infty$, $\forall i \in \mathrm{I}$. Lúc đó

$$d \in \bigcap_{i \in I} (C_i)_\infty, \forall i \in \mathrm{I}.$$

Như vậy ta thu được kết quả

$$(\bigcap_{i \in I} C_i)_\infty \subset \bigcap_{i \in I} (C_i)_\infty \text{ khi } \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$$

Ngược lại, giả sử thêm tính lồi và đóng cho các tập $C_i, i \in I$ ta sẽ chỉ ra $\bigcap_{i \in I}(C_i)_\infty \subset (\bigcap_{i \in I} C_i)_\infty$. Giả sử $d \in \bigcap_{i \in I}(C_i)_\infty$ suy ra $d \in (C_i)_\infty$, $\forall i \in I$. Từ biểu diễn của $D(x)$ ở Mệnh đề 2.8 ta có được

$$\forall\, x \in C_i \text{ suy ra } x + td \in C_i,\ \forall\, i \in I.$$

Tức là $\forall\, x \in \bigcap_{i \in I} C_i$ thì $x + td \in C_i$, $\forall\, i \in I$. Suy ra

$$x + td \in \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Do đó $d \in (\bigcap_{i \in I} C_i)_\infty$ hay $\bigcap_{i \in I}(C_i)_\infty \subset (\bigcap_{i \in I} C_i)_\infty$.

(b) Chứng minh tương tự (a) giả sử rằng $d \in \bigcup_{i \in I} (C_i)_\infty$. Điều này dẫn đến $\exists\, i \in \mathrm{I}$ để $d \in (C_i)_\infty$. Do đó

$$\exists\, \mathrm{t}_k \to \infty,\ \exists\, x_k \in C_i \text{ sao cho } \frac{x_k}{\mathrm{t}_k} \to d.$$

Vì thế $\exists\, i \in \mathrm{I}$ sao cho

$$\exists\, \mathrm{t}_k \to \infty, \exists\, x_k \in \bigcup_{i \in I} C_i \text{ với } \frac{x_k}{\mathrm{t}_k} \to d.$$

Vậy $d \in \bigcup_{i \in I} (C_i)_\infty$ suy ra $(\bigcup_{i \in I} C_i)_\infty \supset \bigcup_{i \in I} (C_i)_\infty$.

Ngược lại, khi thêm điều kiện hữu hạn cho tập chỉ số I ta chứng minh được chiều "$\subset$" của bao hàm thức. Thật vậy, lấy $d \in (\bigcup_{i \in \mathrm{I}} C_i)_\infty$. Lúc này

$$\exists\, x_k \in \bigcup_{i \in I} C_i,\ \exists\, \mathrm{t}_k \to \infty \text{ sao cho } \frac{x_k}{\mathrm{t}_k} \to d.$$

Do $x_k \in \bigcup_{i \in I} C_i$ và I hữu hạn nên $\exists\, i \in I$ và tồn tại dãy con

$$\exists\, x_{k_l} \in C_i,\ \exists\, t_{k_l} \to \infty \text{ mà } \frac{x_{k_l}}{t_{k_l}} \to d.$$

Từ đây suy ra $d \in (C_i)_\infty$, hay $d \in \bigcup_{i \in I} (C_i)_\infty$. Tức là $(\bigcup_{i \in I} C_i)_\infty \subset \bigcup_{i \in I} (C_i)_\infty$, do đó mệnh đề được chứng minh.

□

Mệnh đề 2.12. *Các tập $C_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$ thì*

$$(C_1 \times \ldots \times C_m)_\infty \subset (C_1)_\infty \times \ldots \times (C_m)_\infty.$$

Bao hàm thức trở thành đẳng thức khi thêm điều kiện lồi và khác rỗng cho mỗi C_i.

Chứng minh. Khẳng định

$$(C_1 \times \ldots \times C_m)_\infty \subset (C_1)_\infty \times \ldots \times (C_m)_\infty,\ C_i \subset \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1, m}$$

được chứng minh trực tiếp từ định nghĩa của nón tiệm cận. Thật vậy, giả sử rằng $d \in (C_1 \times \ldots \times C_m)_\infty$, tức là $d = (d_1, \ldots, d_m)$

$$\exists\, x_{k_i} \in C_i,\ i = \overline{1, m},\ \exists\, t_k \to \infty \text{ sao cho } \frac{x_{k_i}}{t_k} \to d_i.$$

Vì vậy $d_i \in (C_i)_\infty$ nên $d \in \prod_{i=1}^{m} (C_i)_\infty$, hay

$$(C_1 \times \ldots \times C_m)_\infty \subset (C_1)_\infty \times \ldots \times (C_m)_\infty.$$

Ngược lại, khi các tập C_i là lồi, khác rỗng thì các tập C_i là chính quy tiệm cận. Giả sử $d \in \prod_{i=1}^{m} (C_i)_\infty$ hay $d = (d_1, \ldots, d_m)$ với $d_i \in (C_i)_\infty$, $i = \overline{1, m}$ thì

$$t_k \to \infty,\ \exists\, x_{k_i} \in C_i,\ i = \overline{1, m} \text{ sao cho } \frac{x_{k_i}}{t_k} \to d_i \in (C_i)_\infty.$$

Do đó

$$\exists\, t_k \to \infty,\ \exists\, x_{k_i} \in C_i,\ i = \overline{1,m} \text{ sao cho } \frac{x_{k_i}}{t_k} \to d_i.$$

Viết một cách tường minh nghĩa là

$$\exists\, x_k = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) \text{ với } x_{k_i} \in C_i,\ i = \overline{1,m}$$

suy ra

$$\exists\, x_k \in \prod_{i=1}^{m} C_i,\ \exists\, t_k \to \infty \text{ để } \frac{x_k}{t_k} \to d$$

và khi đó $d \in (\prod\limits_{i=1}^{m} C_i)_\infty$, hay $(C_1)_\infty \times \ldots \times (C_m)_\infty \subset (C_1 \times \ldots \times C_m)_\infty$. Như vậy khi thêm điều kiện các tập $C_1, \ldots, C_m$ là lồi và khác rỗng ta đã chứng minh được rằng nón tiệm cận của một tích Descartes của m tập $C_1, \ldots, C_m$ chính là tích Descartes của m nón tiệm cận của nó. □

Mệnh đề 2.13. *Ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính và C là tập lồi đóng trong $\mathbb{R}^n$ sao cho nghịch ảnh của C là khác rỗng, thì*

$$\left(A^{-1}(C)\right)_\infty = A^{-1}(C_\infty).$$

Chứng minh. Vì A là ánh xạ tuyến tính, mà C là tập lồi đóng nên nghịch ảnh của C qua A cũng bảo toàn tính lồi, đóng. Giả sử rằng $x \in A^{-1}(C)$ thì $d \in \left(A^{-1}(C)\right)_\infty$ khi và chỉ khi

$$A(x + td) = Ax + tAd \subset C, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Suy ra $Ad \in C_\infty$, tức là $d \in A^{-1}(C_\infty)$. Như vậy đã chứng minh được rằng nón tiệm cận của nghịch ảnh của C qua ánh xạ tuyến tính A bằng đúng nghịch ảnh của nón tiệm cận của C. □

Để kết thúc mục này ta sẽ xem xét biểu diễn nón tiệm cận cho một số tập quen thuộc.

Ví dụ 2.14. (a) Cho C là một nón trong $\mathbb{R}^n$ thì nón tiệm cận của C chính là bao đóng của nó. Khẳng định này đã được chứng minh trong Mệnh đề 2.3.

(b) Với C là một tập affine thì C_∞ là không gian con tuyến tính song song với C.

Do C là tập affine nên ta có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$C = x + L \text{ với } x \in C \text{ và } L \text{ là một không gian con.}$$

Có thể viết lại thành

$$\mathrm{L} = \mathrm{C} - \mathrm{x}, \text{ với } x \in C.$$

Mặt khác từ Mệnh đề 2.8 ta đã có một biểu diễn thay thế khác cho nón tiệm cận C_∞ trong trường hợp C là tập lồi đóng là

$$C_\infty = \bigcap_{t>0} t^{-1}(C - x), \ \forall\, x \in C.$$

Do đó $\mathrm{L} = C_\infty$ hay C_∞ là không gian con tuyến tính song song với C.

(c) Tập lồi đa diện C được cho bởi

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n |\ Ax \leq b\}$$

trong đó A là ma trận cấp $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ thì

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n |\ Ad \leq 0\}.$$

(d) Cho $C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_2 \geq {x_1}^2\right\}$ thì

$$C_\infty = \left\{d \in \mathbb{R}^2 |\ d_1 = 0,\ d_2 \geq 0\right\}.$$

(e) Hình cầu đơn vị $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x\| \leq 1\}$ là tập bị chặn nên $\mathbb{B}_\infty = \{0\}$.

2.2 Hàm tiệm cận

Sau khi xây dựng được khái niệm nón tiệm cận ta quan tâm tới việc nghiên cứu đặc trưng của nó trong mở rộng hàm

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Trước tiên xét F là một tập đóng khác rỗng trong $\mathbb{R}^{n+1}$ thỏa mãn

$$(x, u) \in F \Longrightarrow (x, u') \in F,\ \forall\, u' > u. \tag{2.1}$$

Dễ thấy từ tính chất này của F làm nảy sinh một và chỉ một hàm g sao cho $\operatorname{epi} g = F$ tức là hàm g được xác định bởi

$$\mathrm{g}\,(x) := \inf\{u|\,(x, u) \in F\}.$$

Giả thiết $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường thì $\operatorname{epi} f \neq \emptyset$, do đó $(\operatorname{epi} f)_\infty \neq \emptyset$ và là nón đóng trong $\mathbb{R}^{n+1}$ thỏa mãn (2.1) tức là

$$(x, u) \in (\operatorname{epi} f)_\infty \Longrightarrow (x, u') \in (\operatorname{epi} f)_\infty,\ \forall\ u' > u.$$

Áp dụng định nghĩa nón tiệm cận cho tập $\operatorname{epi} f$ ta nhận được

$$\exists\,(x_k, u_k) \in \operatorname{epi} f,\ \exists\, t_k \to \infty \text{ mà } \frac{1}{t_k}(x_k, u_k) \xrightarrow{k\to\infty} (x, u).$$

Đặt

$$u_k{}' := u_k + (u' - u)\, t_k,$$

vì $u' > u$ nên ta có $u_k{}' > u_k > f(x_k)$ hay $f(x_k) < u_k{}'$. Cho $k \to \infty$ ta được

$$\frac{1}{t_k}(x_k, u_k{}') \to (x, u').$$

Từ đây suy ra

$$(x, u') \in (\operatorname{epi} f)_\infty,\ u' > u.$$

Như vậy, có thể xây dựng nón tiệm cận thông qua tập trên đồ thị của nó.

Định nghĩa 2.15. Với mỗi hàm chính thường $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tồn tại duy nhất hàm $f_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gọi là *ánh xạ tiệm cận* (*hàm tiệm cận*) nếu

$$\operatorname{epi} f_\infty = (\operatorname{epi} f)_\infty.$$

Dễ thấy, trên đồ thị của một ánh xạ tiệm cận là một nón đóng. Nhắc lại rằng, một hàm $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là thuần nhất dương nếu $0 \in \operatorname{dom} \pi$ và $\pi(\lambda x) = \lambda \pi(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $\lambda > 0$. Đối với hàm tiệm cận ta cũng chỉ ra được tính nửa liên tục dưới và thuần nhất dương của nó.

Mệnh đề 2.16. *Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường thì*

(a) *f_∞ là nửa liên tục dưới và thuần nhất dương.*

(b) *$f_\infty(0) = 0$ hoặc $f_\infty(0) = -\infty$.*

(c) *Nếu $f_\infty(0) = 0$ thì f_∞ là chính thường.*

Chứng minh. (a) Theo Định nghĩa 2.15 ta luôn có $\operatorname{epi} f_\infty = (\operatorname{epi} f)_\infty$, hơn nữa $(\operatorname{epi} f)_\infty$ là một nón đóng. Kéo theo $\operatorname{epi} f_\infty$ cũng là nón đóng. Từ tính đóng của nó suy ra f_∞ là nửa liên tục dưới.

Tiếp tục ta chứng minh tính thuần nhất dương của f_∞. Thật vậy, vì f là chính thường nên $0 \in \operatorname{dom} f_\infty$. Trước tiên ta xét trường hợp x $\in \operatorname{dom} f_\infty$. Hơn nữa $\operatorname{epi} f_\infty$ là nón đóng, xét $(x, f_\infty(x)) \in \operatorname{epi} f_\infty$ suy ra

$$(\lambda x, \lambda f_\infty(x)) \in \operatorname{epi} f_\infty,\ \forall \lambda > 0,$$

dẫn tới

$$f_\infty(\lambda x) \le \lambda f_\infty(x).$$

Xét

$$(\lambda x, f_\infty(\lambda x)) \in \operatorname{epi} f_\infty, \forall x \in \operatorname{dom} f_\infty,\ \forall \lambda > 0.$$

Áp dụng cho tập $\operatorname{epi} f_\infty$ là một nón, với $\lambda^{-1} > 0$ ta nhận được

$$\left(x, \lambda^{-1} f_\infty(\lambda x)\right) \in \operatorname{epi} f_\infty.$$

Tức là

$$f_\infty(x) \le \lambda^{-1} f_\infty(\lambda x), \forall \lambda > 0 \text{ hay } \lambda f_\infty(x) \le f_\infty(\lambda x).$$

Kết hợp với chứng minh trên ta có

$$\lambda f_\infty(x) = f_\infty(\lambda x), \forall \lambda > 0,\ \forall x \in \operatorname{dom} f_\infty.$$

Trường hợp còn lại, với $x \notin \operatorname{dom} f_\infty$ thì $\lambda x \notin \operatorname{dom} f_\infty$, $\forall \lambda > 0$ suy ra

$$f_\infty(\lambda x) = \lambda f_\infty(x) = +\infty.$$

Như vậy f_∞ là thuần nhất dương.

(b) Từ giả thiết f là chính thường ta có $\operatorname{epi} f \neq \emptyset$. Không mất tính tổng quát giả sử $f_\infty(0) = -\infty$. Trường hợp còn lại khi $f_\infty(0)$ là hữu hạn. Sử dụng tính thuần nhất dương của f_∞ đã chỉ ra ở (a) có ngay

$$f_\infty(0) = \lambda f_\infty(0) = 0,\ \forall \lambda > 0.$$

(c) Bằng phản chứng, giả sử rằng f_∞ không là chính thường nghĩa là tồn tại x sao cho $f_\infty(x) = -\infty$. Lấy $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{++}$ là dãy dương hội tụ tới 0 thì $\lambda_k x \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Do f_∞ nửa liên tục dưới và thuần nhất dương, kết hợp với giả thiết $f_\infty(0) = 0$ nên

$$0 = f_\infty(0) \le \liminf_{k\to\infty} f_\infty(\lambda_k x) = \liminf_{k\to\infty} \lambda_k \underbrace{f_\infty(x)}_{-\infty} = -\infty.$$

Điều này là không thể. Vậy f_∞ là chính thường. □

Định lý dưới đây đưa ra những biểu diễn giải tích cơ bản của một ánh xạ tiệm cận.

Định lý 2.17. *Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường. Ánh xạ tiệm cận của f là*

$$f_\infty(d) = \liminf_{\substack{d'\to d\\ t\to+\infty}} \frac{f(td')}{t}, \tag{2.2}$$

hoặc tương đương

$$f_\infty(d) = \inf\left\{\liminf_{k\to\infty} \frac{f(t_k d_k)}{t_k} \mid t_k \to +\infty,\ d_k \to d\right\}, \tag{2.3}$$

với $\{t_k\}, \{d_k\}$ lần lượt là các dãy trong $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh hai Công thức (2.2) và (2.3) là tương đương. Đặt

$$g(d) := \underbrace{\inf\left\{\liminf_{k\to\infty} \frac{f(t_k d_k)}{t_k} \mid t_k \to +\infty,\ d_k \to d\right\}}_{\text{vế phải của (2.3)}}$$

ta sẽ chỉ ra rằng $(\operatorname{epi} f)_\infty = \operatorname{epi} g$.

Giả sử $(d, u) \in (\operatorname{epi} f)_\infty$ từ Định nghĩa 2.2 áp dụng với nón tiệm cận cho tập $\operatorname{epi} f$ ta có

$$\exists\, t_k \to \infty,\ \exists\, (d_k, u_k) \in \operatorname{epi} f \text{ sao cho } t_k^{-1}(d_k, u_k) \xrightarrow{k\to\infty} (d, u).$$

Mặt khác $f(d_k) \le u_k$ khi $t_k \to \infty$ kéo theo

$$t_k{}^{-1} f\left(t_k{}^{-1} d_k t_k\right) \le t_k{}^{-1} u_k.$$

Giờ cho $k \to \infty$ ta được

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(t_k{}^{-1} d_k t_k\right)}{t_k} \le \lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{t_k}.$$

Lấy infimum hai vế ta có $g(d) \le u$ kéo theo $(d,u) \in \operatorname{epi} g$. Điều này dẫn đến bao hàm thức $(\operatorname{epi} f)_\infty \subset \operatorname{epi} g$.

Ngược lại lấy $(d,u) \in \operatorname{epi} g$, từ cách đặt cho $g(d)$ sẽ tồn tại dãy $\{d_k\} \subset \mathbb{R}^n$ và dãy $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ sao cho

$$g(d) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(t_k d_k)}{t_k},\ t_k \to \infty,\ d_k \to d.$$

Do $(d,u) \in \operatorname{epi} g$ tức là $g(d) \le u$, viết tường minh ta có

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(t_k d_k)}{t_k} \le u \text{ hay } f(t_k d_k) \le u t_k.$$

Từ đây suy ra với mọi $\varepsilon > 0$ và cho mỗi $k \in \mathbb{N}$ đủ lớn thì

$$f(t_k d_k) \le (u+\varepsilon)\, t_k.$$

Đặt

$$z_k := t_k\,(d_k, u+\varepsilon) \text{ thì } z_k \in \operatorname{epi} f.$$

Lúc đó

$$t_k{}^{-1} z_k = (d_k, u+\varepsilon) \xrightarrow{k\to\infty} (d, u+\varepsilon)$$

cho nên

$$(d, u+\varepsilon) \in (\operatorname{epi} f)_\infty.$$

Hơn nữa $(\operatorname{epi} f)_\infty$ là đóng nên $\forall\, \varepsilon > 0$ tùy ý thì

$$(d, u) \in (\operatorname{epi} f)_\infty.$$

Dẫn tới bao hàm thức $\operatorname{epi} g \subset (\operatorname{epi} f)_\infty$. Bởi vậy $\operatorname{epi} g = (\operatorname{epi} f)_\infty$, có nghĩa hai Công thức (2.2) và (2.3) là tương đương. $\square$

Một lớp bài toán quan trọng trong tối ưu phi tuyến là các bài toán tối ưu lồi. Để đảm bảo cho bài toán có nghiệm ta thường xét điều kiện mở rộng là tính nửa liên tục dưới của hàm. Phần lớn các hàm lồi gặp trong thực tế đều chính thường. Vì vậy ta sẽ giả thiết rằng các hàm số được xét là chính thường, lồi, nửa liên tục.

Mệnh đề 2.18. *Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, lồi, nửa liên tục dưới. Khi đó, ánh xạ tiệm cận của nó là thuần nhất dương, chính thường, lồi, nửa liên tục dưới và với mỗi $d \in \mathbb{R}^n$ thì*

$$f_\infty(d) = \sup\{f(x+d) - f(x) \mid x \in \operatorname{dom} f\} \tag{2.4}$$

và

$$f_\infty(d) = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}, \ \forall\, x \in \operatorname{dom} f. \tag{2.5}$$

Chứng minh. Từ Mệnh đề 2.16 ta có được f_∞ là lồi, nửa liên tục dưới, thuần nhất dương.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh Công thức (2.4). Áp dụng định nghĩa của hàm tiệm cận và biểu diễn F ở Mệnh đề 2.8 ta có

$$(d, u) \in (\operatorname{epi} f)_\infty \Longleftrightarrow (x, \alpha) \in \operatorname{epi} f \text{ thì } (d, u) + (x, \alpha) \in \operatorname{epi} f.$$

Do đó

$$f(x+d) \leq \alpha + u$$

hay

$$f(x+d) - \alpha \leq u.$$

Hơn nữa $f(x) \leq \alpha$ nên

$$f(x+d) - f(x) \leq u,\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f.$$

Suy ra ta chứng minh được Công thức (2.4).

Tiếp tục ta chứng minh Công thức (2.5). Giả sử $x \in \operatorname{dom} f$, từ Mệnh đề 2.8 sử dụng biểu diễn D cho nón tiệm cận, $\forall\, x \in \operatorname{dom} f$ ta được

$$(\operatorname{epi} f)_\infty = \{(d,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\, (x, f(x)) + t\,(d,u) \in \operatorname{epi} f,\ \forall\, t > 0\}$$

hay

$$(x, f(x)) + t\,(d,u) = (x + td, f(x) + tu) \in \operatorname{epi} f.$$

Suy ra

$$f(x+td) \leq f(x) + tu,\ \forall\, t > 0 \text{ tức là } \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq u.$$

Đặt

$$g(d) := \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq u,$$

thì

$$(\operatorname{epi} f)_\infty = \operatorname{epi} g,\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f.$$

Chuyển $\dfrac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq u$ qua giới hạn tại t, cố định x, thêm nữa f lồi nên ta được $\dfrac{f(x+td) - f(x)}{t}$ là hàm không giảm. Nghĩa là nó bị chặn suy ra tồn tại cận trên đúng bằng giới hạn của nó. Viết tường minh ta có ngay Công thức (2.5).

Bằng cách sử dụng Công thức (2.5) và Mệnh đề 2.16 ta cũng có thể kiểm chứng được tính chính thường của f_∞. Thật vậy, $f_\infty\ (d) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f\,(x+td) - f\,(x)}{t}$, suy ra $f_\infty\,(0) = 0$. Vậy f_∞ là chính thường. □

Kết quả tiếp theo là một công thức đơn giản hơn cho ánh xạ tiệm cận.

Hệ quả 2.19. *Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, lồi, nửa liên tục dưới thì*

$$f_\infty\,(d) = \lim_{t\to 0^+} tf\left(t^{-1}d\right),\ \forall\, d \in \operatorname{dom} f.$$

Nếu $0 \in \operatorname{dom} f$, công thức trên là đúng với mọi $d \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Đầu tiên ta xét trường hợp $0 \in \operatorname{dom} f$, dẫn tới $f\,(0) < \infty$. Áp dụng Công thức (2.5):

$$f_\infty\,(d) = \lim_{t\to+\infty} \frac{f\,(x+td) - f\,(x)}{t}\ .$$

Đổi cận $t \to 0^+$ ta được

$$f_\infty\,(d) = \lim_{t\to 0^+} tf\left(t^{-1}d\right).$$

Trường hợp còn lại khi $0 \notin \operatorname{dom} f$. Sử dụng Công thức (2.5) và thay $x := d \in \operatorname{dom} f$ thì với mỗi $d \in \operatorname{dom} f$ ta có

$$\begin{aligned} f_\infty\,(d) &= \lim_{t\to+\infty} \frac{f\,(d+td) - f\,(d)}{t} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{f\,((1+t)d) - f\,(d)}{t} \end{aligned}$$

đổi cận ta cũng được $f_\infty(d) = \lim\limits_{t\to 0^+} tf\left(t^{-1}d\right)$. $\square$

Dưới đây là biểu diễn hàm tiệm cận của một số hàm quen thuộc.

Ví dụ 2.20. (a) Cho Q là ma trận nửa xác định dương cấp $n \times n$

$$f(x) := (1 + \langle x, Qx\rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

Dễ thấy f lồi do Q là nửa xác định dương, mặt khác f liên tục. Sử dụng công thức ở Hệ quả 2.19, ta có

$$\begin{aligned}
f_\infty(d) &= \lim_{t\to 0^+} t\left(1 + \left\langle \frac{d}{t}, \frac{Qd}{t}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{t\to 0^+} t\left(1 + \frac{1}{t^2}\langle d, Qd\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(t^2 + \langle d, Qd\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle d, Qd\rangle^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(b) Cho Q là ma trận nửa xác định dương xét hàm bậc hai được cho bời công thức

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle c, x\rangle + s, \quad c \in \mathbb{R}^n, \ s \in \mathbb{R}.$$

Ta thấy $f(x)$ liên tục và lồi. Áp dụng công thức hàm tiệm cận từ Hệ quả 2.19 cho hàm lồi ta có

$$\begin{aligned}
f_\infty(d) &= \lim_{t\to 0^+} t\left(\frac{1}{2}\left\langle \frac{d}{t}, \frac{Qd}{t}\right\rangle + \left\langle c, \frac{d}{t}\right\rangle + s\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2t}\langle d, Qd\rangle + \langle c, d\rangle + ts \\
&= \begin{cases} \langle c, d\rangle & \text{nếu } Qd = 0, \\ +\infty & \text{nếu } Qd \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi Q không là nửa xác định dương, hàm f không lồi. Áp dụng Công thức (2.2) ta được

$$\begin{aligned}
f_\infty(d) &= \liminf_{\substack{d'\to d\\ t\to+\infty}} \frac{f(td')}{t}\\
&= \lim_{\substack{d'\to d\\ t\to+\infty}} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\langle td', Qtd'\rangle + \langle c, td'\rangle + s\right)\\
&= \lim_{\substack{d'\to d\\ t\to+\infty}} \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2}\langle d', Qd'\rangle + \langle c, td'\rangle + s\right)\\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2}\langle d, Qd\rangle + \langle c, d\rangle + \frac{s}{t}\\
&= \begin{cases} -\infty & \text{nếu } d^TQd \le 0,\\ +\infty & \text{nếu } d^TQd > 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

(c) Cho $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} e^{x_j}$ thì $f_\infty(d) = \delta_{\mathbb{R}^n_-}$. Thật vậy, $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} e^{x_j}$ là hàm lồi, liên tục với mọi $x_j \in \mathbb{R}^n$. Áp dụng công thức

$$f_\infty(d) = \lim_{t\to 0^+} tf\left(t^{-1}d\right)$$

ta nhận được

$$\begin{aligned}
f_\infty(d) &= \lim_{t\to 0^+} t\sum_{j=1}^{n} e^{t^{-1}d_j}\\
&= \sum_{j=1}^{n} t\lim_{t\to 0^+} e^{t^{-1}d_j}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{nếu } d_j \in \mathbb{R}^n_-,\\ +\infty & \text{nếu } d_j \notin \mathbb{R}^n_-.\end{cases}\\
&= \delta_{\mathbb{R}^n_-}.
\end{aligned}$$

(d) Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = |x|$. Ta thấy f là hàm nửa liên tục dưới và lồi. Áp dụng biểu diễn hàm tiệm cận ở Hệ quả 2.19 ta có

$$f_\infty(d) = \lim_{t \to 0^+} tf\left(t^{-1}d\right) = \lim_{t \to 0^+} t\left|t^{-1}d\right| = |d|.$$

Vậy $f_\infty(d) = |d|$. Tương tự với $f(x) = -|x|$ ta cũng được $f_\infty(d) = -|d|$.

(e) Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = x^2$ dễ dàng tính được

$$f_\infty(d) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } d = 0, \\ +\infty & \text{nếu } d \neq 0. \end{cases}$$

Mệnh đề 2.21. *Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\operatorname{lev}(f, \alpha) \neq \emptyset$ thì $(\operatorname{lev}(f, \alpha))_\infty \subset \operatorname{lev}(f_\infty, \alpha)$ tức là*

$$\{x \mid f(x) \leq \alpha\}_\infty \subset \{d \mid f_\infty(d) \leq 0\}.$$

Bao hàm thức trở thành đẳng thức khi f là chính thường, nửa liên tục dưới, và lồi.

Chứng minh. Do tập mức $\operatorname{lev}(f, \alpha) \neq \emptyset$ nên tồn tại nón tiệm cận $(\operatorname{lev}(f, \alpha))_\infty$. Giả sử $d \in (\operatorname{lev}(f, \alpha))_\infty$ ta sẽ chứng minh $f_\infty(d) \leq 0$. Thật vậy, từ định nghĩa nón tiệm cận ta có

$$\exists\, x_k \in \operatorname{lev}(f, \alpha) \text{ thì } \exists\, t_k \to +\infty \text{ sao cho } \lim_{k \to \infty} \frac{x_k}{t_k} = d.$$

Đặt $d_k = \dfrac{x_k}{t_k}$ thì $d_k \xrightarrow{k \to \infty} d$, ngoài ra $x_k \in \operatorname{lev}(f, \alpha)$ nên

$$\frac{f(t_k d_k)}{t_k} = \frac{f(x_k)}{t_k} \leq \frac{\alpha}{t_k} \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Lấy infimum hai vế của bất đẳng thức trên, và áp dụng Công thức (2.3) có ngay $f_\infty(d) \leq 0,\ \forall\, d$. Vậy $(\operatorname{lev}(f, \alpha))_\infty \subset \operatorname{lev}(f_\infty, \alpha)$.

Ngược lại, ta sẽ chỉ ra bao hàm thức "$\supset$" cũng đúng khi giả thiết thêm tính lồi và nửa liên tục dưới cho f. Giả sử tồn tại d sao cho $f_\infty(d) \leq 0$ thì với mỗi $x \in \operatorname{lev}(f, \alpha)$ và $\lambda > 0$ theo Công thức (2.5) ta có

$$f(x + \lambda d) - f(x) \leq \lambda f_\infty(d) \leq 0.$$

Suy ra

$$f(x + \lambda d) \leq f(x) \leq \alpha.$$

Do đó $x + \lambda d \in \operatorname{lev}(f, \alpha)$. Dễ dàng kiểm chứng được rằng tập mức $\operatorname{lev}(f, \alpha)$ thỏa mãn điều kiện của Mệnh đề 2.8. Thật vậy tập mức $\operatorname{lev}(f, \alpha)$ đóng vì f là nửa liên tục dưới. Hơn nữa f lồi nên tập mức $\operatorname{lev}(f, \alpha)$ cũng là lồi. Từ biểu diễn tập D ở Mệnh đề 2.8 suy ra $d \in (\operatorname{lev}(f, \alpha))_\infty$. Như vậy là bao hàm thức ngược lại cũng đúng khi f là chính thường, nửa liên tục dưới và lồi. □

Một ví dụ minh họa cho mệnh đề trên. Cho Q là ma trận nửa xác định dương cấp $n \times n$, $a \in \mathbb{R}^n$ và $\beta \in \mathbb{R}$. Tập C được cho bởi

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n |\, (x - a)^T Q (x - a) \leq \beta \right\}.$$

Rõ ràng $f(x) := (x - a)^T Q (x - a)$ là hàm lồi. Áp dụng Mệnh đề 2.21 và Ví dụ 2.20 ta được $C = \{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) \leq \beta\}$. Suy ra

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n |\, f_\infty(d) \leq 0\}$$

hay

$$C_\infty = \left\{ d \in \mathbb{R}^n |\, d^T Q a \leq 0,\ Qd = 0 \right\}.$$

Hệ quả dưới đây là trường hợp tổng quát được suy ra trực tiếp từ Mệnh đề 2.21.

Hệ quả 2.22. *Các hàm* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $i \in I$ *là chính thường và tập* $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$. *Với một tập* $C := \{x \in S |\ f_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I\}$ *thì*

$$C_\infty \subset \{d \in S_\infty |\ (f_i)_\infty (x) \leq 0,\ \forall i \in I\}.$$

Bao hàm thức trở thành đẳng thức khi $C \neq \emptyset$, *tập* S *là lồi đóng trong* $\mathbb{R}^n$, *và các hàm* f_i *là nửa liên tục dưới, lồi.*

Chứng minh. Đặt

$$C_i := \{x \in \mathbb{R}^n |\ f_i(x) \leq 0\} \text{ sao cho } C = S \cap \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Từ chứng minh ở Mệnh đề 2.11 ta có

$$C_\infty = (S \cap \bigcap_{i\in I} C_i)_\infty \subset S_\infty \cap (\bigcap_{i\in I} C_i)_\infty \subset S_\infty \cap \bigcap_{i\in I} (C_i)_\infty.$$

Do $C_\infty \subset S_\infty \cap \bigcap_{i\in I} (C_i)_\infty$, theo cách đặt $C_i := \{x \in \mathbb{R}^n |\ f_i(x) \leq 0\}$ và áp dụng Mệnh đề 2.21 suy ra

$$(C_i)_\infty = \{x |\ (f_i)_\infty(x) \leq 0\}_\infty \subset \{d \in \mathbb{R}^n |\ (f_i)_\infty(d) \leq 0\}.$$

Hơn nữa $S \subset \mathbb{R}^n$ nên

$$C_\infty \subset \{d \in S_\infty |\ (f_i)_\infty (d) \leq 0,\ \forall i \in I\}.$$

Như vậy bao hàm thức được chứng minh.

Từ Mệnh đề 2.11 và Mệnh đề 2.21 ta thấy rằng bao hàm thức

$$C_\infty \subset \{d \in S_\infty |\ (f_i)_\infty (x) \leq 0,\ \forall i \in I\}$$

trở thành đẳng thức khi thêm điều kiện lồi, đóng cho S, $C \neq \emptyset$ và tính nửa liên tục dưới, lồi cho các hàm f_i. $\square$

Mệnh đề 2.23. *Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, nửa liên tục dưới, lồi. Hàm f là Lipschitz trên $\mathbb{R}^n$, tức là*

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

khi và chỉ khi f_∞ là hữu hạn trên $\mathbb{R}^n$ và hằng số Lipschitz được cho bởi

$$L = \sup \{f_\infty(d) \mid \|d\| = 1\}.$$

Chứng minh. Đầu tiên giả sử hàm tiệm cận f_∞ hữu hạn trên $\mathbb{R}^n$ và có hằng số Lipschitz

$$L = \sup \{f_\infty(d) \mid \|d\| = 1\}.$$

Ta sẽ chứng minh nó thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|, \ \ \forall x, \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Do f_∞ là liên tục, mặt khác

$$\sup \{f_\infty(d) \mid \|d\| = 1\} = L < \infty$$

nên từ tính thuần nhất dương của f_∞ suy ra

$$f_\infty(d) \leq L \text{ hay } f_\infty(d) \leq L \|d\|.$$

Sử dụng Công thức (2.4) của hàm tiệm cận, thay

$$f_\infty(d) = \sup \{f(x + d) - f(x) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$$

vào bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$f(x + d) - f(x) \leq L \|d\|, x \in \operatorname{dom} f, \ d \in \mathbb{R}^n.$$

Từ $f(x+d) < \infty$ kéo theo $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^n$. Viết lại bất đẳng thức trên ta được

$$f(x+d) - f(x) \leq L\|d\|, \; \forall x, d \in \mathbb{R}^n.$$

Tức là

$$f(x+d) - f(x) \leq L\|x+d-x\|, \; \forall x, d \in \mathbb{R}^n.$$

Đặt $x + d = y \in \mathbb{R}^n$ thay vào ta có ngay bất đẳng thức cần chứng minh

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x-y\|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ngược lại, giả sử f là Lipschitz, ta sẽ chỉ ra f_∞ là hữu hạn trên $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, từ điều kiện Lipschitz của hàm f nên $\forall x \in \mathbb{R}^n$ thì

$$f(x+td) - f(x) \leq tL\|d\|, \; \forall t > 0, \; d \in \mathbb{R}^n.$$

Hơn thế nữa ở Công thức (2.5)

$$f_\infty(d) = \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t},$$

thay vào bất đẳng thức trên ta nhận được

$$f_\infty(d) \leq L\|d\|, \; \forall d.$$

Mặt khác $d \in \mathbb{R}^n$ nên $\operatorname{dom} f_\infty = \mathbb{R}^n$. Vì vậy ta có $\sup \{f_\infty(d) \mid \|d\| = 1\} = L$. □

Định lý 2.24. *Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, nửa liên tục dưới và lồi. Với mỗi $x \in \operatorname{dom} f$ và $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ đặt $\psi(t) := f(x+td)$ khi đó.*

(a) *Nếu $f_\infty(d) \leq 0$ thì $\limsup_{t \to +\infty} \psi(t) < +\infty$.*

(b) *Nếu tồn tại $z \in \operatorname{dom} f$ sao cho $\liminf_{t \to +\infty} f(z+td) < +\infty$ thì ψ là hàm giảm trên $\mathbb{R}$ tương đương với $f_\infty(d) \leq 0$.*

Chứng minh. (a) Giả sử $f_\infty(d) \leq 0$. Từ Công thức (2.5) ta có

$$f_\infty(d) = \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}, \forall\, x \in \operatorname{dom} f.$$

Dẫn đến $f(x+td) \leq f(x)$, $\forall\, t > 0$ tức là

$$\psi(t) \leq f(x).$$

Mặt khác do f là chính thường, nghĩa là $f(x) < +\infty$. Từ đây suy ra

$$\limsup_{t\to+\infty} \psi(t) < +\infty.$$

(b) Cho $\limsup_{t\to+\infty} f(z+td) < +\infty$, với $z \in \operatorname{dom} f$, ta sẽ chỉ ra $f_\infty(d) \leq 0$. Giả sử $f_\infty(d) > 0$, từ Công thức (2.5) ta được

$$f(z+td) \geq f(z) + t\alpha,\ \forall\ t \geq t_0,\ \alpha > 0.$$

Cho $t \to +\infty$ ta có

$$\lim_{t\to+\infty} f(z+td) \geq \lim_{t\to+\infty} (f(z) + t\alpha).$$

Nhắc lại rằng $z \in \operatorname{dom} f$ nên $f(z) < +\infty$. Do $\alpha > 0$ nên

$$t\alpha \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty.$$

Điều này dẫn đến

$$\lim_{t\to+\infty} f(z+td) \geq +\infty,$$

mâu thuẫn với giả thiết của định lý. Vì vậy ta có $f_\infty(d) \leq 0$. Dễ dàng kiểm chứng tính giảm của ψ, thật vậy do $f_\infty(d) \leq 0$ nên

$$f(x+td) - f(x) \leq 0,\ \forall\, t > 0.$$

Từ định nghĩa $\psi(t) = f(x+td)$ thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$\psi(t) - \psi(0) \leq 0,\ \forall\, t > 0.$$

Hay nói cách khác $\psi(t) \leq \psi(0)$, $\forall t > 0$, như vậy ψ là hàm giảm trên $\mathbb{R}$.

□

Định nghĩa 2.25. Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường, lồi.

(a) *Nón tiệm cận của* f là tập

$$\mathcal{K}_f := \{d \in \mathbb{R}^n |\, f_\infty(d) \leq 0\} = (\operatorname{epi} f)_\infty \cap \{(d, 0) \,|\, d \in \mathbb{R}^n\}.$$

Vectơ $d \in \mathcal{K}_f$ được gọi là *phương tiệm cận của* f.

(b) *Không gian bất biến của* f là

$$\mathcal{C}_f := \{d \in \mathbb{R}^n |\, f_\infty(d) = f_\infty(-d) = 0\} = (-\mathcal{K}_f) \cap \mathcal{K}_f.$$

Định lý 2.26. *Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường, nửa liên tục dưới, lồi. Các phát biểu sau đây cho $d \in \mathbb{R}^n$ và $u \in \mathbb{R}$ là tương đương*

(a) $f(x + td) = f(x) + tu$, $\forall x \in \operatorname{dom} f$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $(d, u) \in -(\operatorname{epi} f)_\infty \cap (\operatorname{epi} f)_\infty$.

(c) $-f_\infty(-d) = f_\infty(d) = u$.

(d) *Hơn nữa, vectơ d thỏa mãn (a) - (c) với $u = f_\infty(d)$ nếu tồn tại $x \in \operatorname{dom} f$ sao cho $f(x + td)$ là hàm affine của f.*

(e) *$d \in \mathcal{C}_f$ khi và chỉ khi f không đổi dọc theo phương d.*

Chứng minh. $(a) \Longrightarrow (c)$: Giả sử (a) đúng tức là

$$f(x + td) = f(x) + tu, \ \forall x \in \operatorname{dom} f, \ t \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng Công thức (2.5)

$$f_\infty(d) = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x + td) - f(x)}{t},$$

chỉ ra được

$$-f_\infty(-d) = f_\infty(d) = u,$$

như vậy là ta đã chứng minh được $(a) \Longrightarrow (c)$.

$(c) \Longrightarrow (b)$: Bây giờ giả sử (c) đúng, tức là

$$-f_\infty(-d) = f_\infty(d) = u.$$

Trong mối quan hệ của hàm tiệm cận và tập trên đồ thị ta có $\text{epi } f_\infty = (\text{epi } f)_\infty$, do đó (d,u) và $(-d,-u)$ thuộc tập $\text{epi}\, f_\infty$. Từ $f_\infty(d) = u$ suy ra $(d,u) \in \text{epi}\, f_\infty = (\text{epi}\, f)_\infty$. Tương tự $-f_\infty(-d) = u$ thì

$$(-d,-u) \in \text{epi}\, f_\infty = (\text{epi}\, f)_\infty.$$

Như vậy $(d,u)\,, (-d,-u) \in \text{epi}\, f_\infty$ hay

$$(d,u) \in -(\text{epi}\, f)_\infty \cap (\text{epi}\, f)_\infty.$$

Do đó (b) đúng.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Nếu (b) đúng nghĩa là

$$(d,u) \in -(\text{epi}\, f)_\infty \cap (\text{epi}\, f)_\infty.$$

Mặt khác, do f là nửa liên tục dưới và lồi nên tập $\text{epi}\, f$ là đóng và lồi suy ra

$$\text{epi}\, f = \text{epi}\, f + (\text{epi}\, f)_\infty.$$

Từ khẳng định (b) ta có thể viết lại biểu diễn cho $\text{epi}\, f$ thành

$$\text{epi}\, f = \text{epi}\, f - t\,(d,u)\,.$$

Lấy $x \in \operatorname{dom} f$ ta có ngay

$$(x, f(x)) \in \operatorname{epi} f.$$

Đặt $h(x) = f(x + td) - tu$ thì $\operatorname{epi} h = \operatorname{epi} f - t(d, u)$. Suy ra

$$\operatorname{epi} h = \operatorname{epi} f \text{ hay } h(x) = f(x)$$

dẫn đến

$$f(x + td) = f(x) + tu,\ \forall\, x \in \operatorname{dom} f,\ t \in \mathbb{R}.$$

(d) Sử dụng Công thức (2.5) và $u = f_\infty(d)$ ta có

$$f(x + td) = tu + f(x),$$

từ biểu diễn này của $f(x + td)$ ta thấy nó là một hàm affine của t.

(e) Do tính lồi của f_∞ nên ta có được

$$f_\infty(0) = 0 \leq f_\infty(d) + f_\infty(-d).$$

Kéo theo

$$-f_\infty(-d) \leq f_\infty(d).$$

Mặt khác

$$-f_\infty(-d) = f_\infty(d),$$

từ đây suy ra

$$f_\infty(-d) = f_\infty(d) = 0.$$

Như vậy $d \in \mathcal{C}_f$ khi và chỉ khi f là hằng số dọc theo phương d, tức là $f_\infty(-d) = f_\infty(d) = 0$. $\square$

Chương 3

Ứng dụng của hàm tiệm cận

Hàm tiệm cận có một số ứng dụng trong

- Tối ưu nửa xác định,
- Mô hình bài toán tối ưu trơn,
- Ánh xạ đơn điệu tối đại,
- Bất đẳng thức biến phân,
- Sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu.

Trong luận văn này chúng tôi sẽ chỉ dừng lại ở việc nghiên cứu "Sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu".

Sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu

Xét bài toán tối ưu tổng quát

$$(P) \quad \inf \{ f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}^n \}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Vấn đề ta quan tâm là có hay không một lời giải tối ưu. Trả lời cho câu hỏi này là định lý Weierstrass quen thuộc trong giải tích. Nếu hàm f liên tục trên một tập compact, khác rỗng thì bài toán có nghiệm tối ưu. Tuy nhiên hai điều kiện: liên tục và compact là nghiêm ngặt và thường không tồn tại. Để đảm bảo cho bài toán có nghiệm ta xét điều kiện mở rộng, trong đó tính liên tục có thể thay thế bằng tính nửa liên tục dưới.

Mệnh đề 3.1. *Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường, nửa liên tục dưới. Tập $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ là compact thì tập nghiệm của bài toán tối ưu của bài toán*

$$\inf \{f(x) \mid x \in C\}$$

là khác rỗng và compact.

Chứng minh. Đặt

$$m := \inf \{f(x) \mid x \in C\} \text{ (có thể bằng } -\infty).$$

Khi đó tồn tại một dãy $\{x_k\} \subset C$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = m.$$

Mặt khác C là tập compact, không giảm tổng quát có thể cho rằng $x_k \to x_0 \in C$. Do f là nửa liên tục dưới nên

$$m \geq \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x_0).$$

Vì $x_0 \in C$ nên theo định nghĩa của m ta có $m \leq f(x_0)$. Vậy $f(x_0) = m$, tức là tập nghiệm của bài toán tối ưu là là khác rỗng và compact. $\square$

Sử dụng trực tiếp mệnh đề trên ta chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu (P).

Hệ quả 3.2. *Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, nửa liên tục dưới. Giả sử tập mức* $\operatorname{lev}(f, \lambda)$ *là bị chặn với một λ nào đó mà $\lambda > \inf f$ thì tập nghiệm tối ưu của bài toán (P) là khác rỗng và compact.*

Chứng minh. Thật vậy, vì f là chính thường nên $\inf_{\mathbb{R}^n} f < \infty$. Xét tập mức của f

$$\operatorname{lev}(f, \lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

Với $\lambda > \inf f$ thì

$$\operatorname{lev}(f, \lambda) \neq \emptyset.$$

Hơn nữa f nửa liên tục dưới nên tập mức $\operatorname{lev}(f, \lambda)$ là đóng. Mặt khác theo giả thiết tập mức $\operatorname{lev}(f, \lambda)$ bị chặn. Do đó tập mức $\operatorname{lev}(f, \lambda)$ là compact. Áp dụng Mệnh đề 3.1 cho tập

$$\mathrm{C} := \operatorname{lev}(f, \lambda)$$

ta được tập nghiệm của bài toán tối ưu là compact và khác rỗng. Thật vậy, vì C là compact, sử dụng Mệnh đề 3.1 suy ra $\exists\, x_0 \in C$ sao cho $f(x_0) \leq f(x), \forall\, x \in C$ ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x_0) = \inf_{\mathbb{R}^n} f(x).$$

Dễ thấy, nếu $x \in C$ thì $f(x_0) \leq f(x)$.

Nếu $x \notin C$. Giả sử $f(x) > \lambda$, mặt khác $x_0 \in C$, suy ra $f(x_0) \leq \lambda$. Do đó $f(x_0) \leq f(x)$. Suy ra

$$f(x_0) = \inf_{\mathbb{R}^n} f(x).$$

Vậy tập nghiệm của bài toán tối ưu là compact và khác rỗng. □

Nhận xét 3.3. (i) Với $\lambda > \inf f$ ta có tập mức $\operatorname{lev}(f,\lambda)$ là khác rỗng bị chặn. Áp dụng Mệnh đề 2.4 tương đương với

$$\operatorname{lev}(f,\lambda)_\infty = \{0\}.$$

Nghĩa là nón tiệm cận của tập mức $\operatorname{lev}(f,\lambda)$ co hẹp lại thành điểm 0.
(ii) Ở Mệnh đề 2.21 đã có

$$\operatorname{lev}(f,\lambda)_\infty \subset \{d \mid f_\infty(d) \le 0\}$$

bao hàm thức trở thành đẳng thức khi f được bổ sung tính lồi. Điều này dẫn đến định nghĩa tiếp theo.

Định nghĩa 3.4. Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là
(a) *Mức bị chặn* nếu với mọi $\lambda > \inf f$, tập mức $\operatorname{lev}(f,\lambda)$ là bị chặn.
(b) *Bức* nếu $f_\infty(d) > 0$, $\forall\, d \neq 0$.

Như một kết quả được suy ra trực tiếp từ định nghĩa ta thấy rằng f là mức bị chặn khi và chỉ khi

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty. \tag{3.1}$$

Thật vậy, giả sử f là bức ta sẽ chứng minh (3.1). Giả sử $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) \neq \infty$. Suy ra tồn tại $\{x_k\}$ trong đó $||x_k|| \to \infty$ và $f(x_k) \nrightarrow \infty$. Tức là $f(x_k)$ bị chặn. Khi đó

$$\sup f(x_k) = \lambda < \infty.$$

Đặt $\operatorname{lev}(f,\lambda) := \{x \mid f(x) \le \lambda\}$. Suy ra $x_k \in \operatorname{lev}(f,\lambda)$. Mặt khác, f là mức bị chặn nên $\{x_k\}$ bị chặn. Điều này mâu thuẫn với $||x_k|| \to \infty$. Vậy $\lim\limits_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$.

Ngược lại, giả thiết rằng $\lim\limits_{||x|| \to \infty} f(x) = \infty$ ta sẽ chứng minh tập mức $\operatorname{lev}(f, \lambda) = \{x|\, f(x) \leq \lambda\}$ là bị chặn. Giả sử $\{x_k\} \in \operatorname{lev}(f, \lambda)$ nên $\{x_k\}$ không bị chặn, tức là $||x_k|| \to \infty$. Vì $\{x_k\} \in \operatorname{lev}(f, \lambda)$ nên $f(x_k) \leq \lambda$. Nghĩa là $f(x_k)$ bị chặn. Điều này mâu thuẫn với điều giả sử ban đầu của ta. Vì vậy nên tập mức $\operatorname{lev}(f, \lambda)$ là bị chặn.

Các điều kiện sau đưa ra những dấu hiệu quan trọng để nhận biết hàm bức.

Mệnh đề 3.5. *Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, nửa liên tục dưới và*

$$\alpha = \liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|}, \quad \beta = \inf\, \{f_\infty(d) \,|\, \|d\| = 1\} \tag{3.2}$$

khi đó cận dưới β là đạt được và $\alpha = \beta$. Hơn nữa f là bức khi và chỉ khi tồn tại $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) \geq \gamma \|x\| + \delta, \ \forall x. \tag{3.3}$$

Chứng minh. Hàm f là chính thường nên f_∞ là nửa liên tục dưới. Áp dụng Công thức (3.2) với $\|x\| = 1$, thay vào d trong $f_\infty(d)$ ta nhận được

$$\underbrace{\liminf_{\|x\|=1} f_\infty(1)}_{\beta} \geq f_\infty(x)$$

suy ra $\beta \geq f_\infty(x)$. Mặt khác theo Định nghĩa của β ở (3.2) thì β là cận dưới của f_∞, nghĩa là $\beta \leq f_\infty(x)$. Như vậy

$$\|x\| = 1, \ f_\infty(x) = \beta. \tag{3.4}$$

Để tiếp tục ta sẽ chứng minh $\alpha \leq \beta$. Từ biểu diễn của hàm tiệm cận ở Định lý 2.17 tức là tồn tại dãy $d_k \to x$, $t_k \to \infty$, $\|x\| = 1$ sao cho

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(t_k d_k)}{t_k \|d_k\|} = \beta,$$

thì $k \to \infty$ ta được $d_k \to x$ suy ra

$$\|d_k\| \to 1,\ t_k \|d_k\| \to \infty.$$

Kết hợp với Định nghĩa của α ta có được $\alpha \leq \beta$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\alpha \geq \beta$. Từ Định nghĩa của α ta có thể lấy dãy $\{x_k\}$ sao cho

$$\|x_k\| \to \infty,\ \frac{x_k}{\|x_k\|} \to \overline{x},\ \|\overline{x}\| = 1,\ \lim_{k\to\infty} \frac{f\left(\frac{x_k}{\|x_k\|}\|x_k\|\right)}{\|x_k\|} = \alpha.$$

Sử dụng biểu diễn f_∞ ở Công thức (2.3) ta có ngay được $f_\infty(\overline{x}) \leq \alpha$, suy ra $\beta \leq \alpha$. Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh $\beta = \alpha$.

Ta sẽ chứng minh f là bức khi và chỉ khi (3.3) đúng. Giả sử (3.3) là không đúng, nghĩa là f là bức thì $\beta = \alpha > 0$, với $\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, tồn tại x sao cho

$$f(x) < \gamma \|x\| + \delta.$$

Chọn $\delta = -k$, $\gamma = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ thì tồn tại dãy $\{x_k\}$ sao cho

$$f(x_k) < \frac{\|x_k\|}{k} - k.$$

Trường hợp nếu $\{x_k\}$ bị chặn tức là tồn tại $N > 0$ trong đó $\|x_k\| \leq N$ thì

$$f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} -\infty,$$

điều này mâu thuẫn với tính bức của f.

Trường hợp còn lại, nếu $\{x_k\}$ không bị chặn tức là $\|x_k\| \to \infty$ suy ra

$$\liminf_{\|x\|\to+\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} \leq \liminf_{k\to+\infty} \frac{f(x_k)}{\|x_k\|}.$$

Mà

$$\frac{f(x_k)}{\|x_k\|} < \frac{1}{k} - \frac{k}{\|x_k\|} < 0, \forall\ k \in \mathbb{N}$$

suy ra

$$\liminf_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} \leq 0,$$

điều này mâu thuẫn với tính bức của f. Như vậy f là bức thì (3.3) đúng.

Dễ dàng chỉ ra được rằng Bất đẳng thức (3.3) là đúng thì f là bức. Thật vậy, giả sử ta có (3.3), tức là tồn tại $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \gamma \|x\| + \delta$, $\forall\, x$ suy ra

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) \geq \lim_{\|x\| \to \infty} \gamma \|x\| + \delta \longrightarrow +\infty.$$

Vì vậy nên f là bức. □

Mệnh đề 3.6. *Một hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là chính thường, nửa liên tục dưới. Hàm f là bức thì nó là mức bị chặn. Nếu f lồi thì các phát biểu sau là tương đương.*

(a) *f là bức.*

(b) *f là mức bị chặn.*

(c) *Tập tối ưu $\{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) = \inf f\}$ là khác rỗng và compact.*

Chứng minh.Từ nhận xét của Mệnh đề 3.4 ta chỉ ra được f bức khi và chỉ khi f là mức bị chặn. Như vậy $(a) \iff (b)$.

Để tiếp tục ta chứng minh $(b) \implies (c)$ khi f là lồi: Thật vậy, với giả thiết f là mức bị chặn ta suy ra được $\operatorname{lev}(f, \lambda)$ bị chặn. Áp dụng Hệ quả 3.2 ta được tập nghiệm tối ưu của bài toán là khác rỗng và compact. □

Kết luận

Luận văn này trình bày một số kết quả chính của Chương 2 "Nón tiệm cận và hàm tiệm cận" ("Asymptotic cones and functions") trong cuốn chuyên khảo [3] của A. Auslender và M. Teboulle. Tiếp đó là ứng dụng của hàm tiệm cận trong bài toán tối ưu tìm cực tiểu.

Ngoài ra hàm tiệm cận còn có những ứng dụng hữu ích trong việc nghiên cứu các bài toán Tối ưu nửa xác định, Tối ưu trơn, bài toán Bất đẳng thức biến phân... Tuy nhiên trong khuôn khổ của một luận văn thạc sĩ tác giả luận văn chưa có dịp đề cập đến ở đây. Tác giả luận văn hy vọng sẽ có điều kiện để tìm hiểu sâu hơn về lớp hàm này.

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Vũ Thiệu, Nguyễn Thị Thu Thủy (2011), *Giáo trình tối ưu phi tuyến,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[2] Hoàng Tụy (2006), *Lý thuyết tối ưu - Bài giảng cao học,* Viện Toán học.

[3] A. Auslender, M. Teboulle (2000), *Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities,* Springer - Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.