Mục lục

Lời nói đầu

Như chúng ta đã biết, bất đẳng thức Ky Fan [15] đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn như: bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm yên ngựa, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị....Do ứng dụng rộng rãi đó, mà bất đẳng thức Ky Fan đã thu hút sự chú ý của rất nhiều nhà nghiên cứu. Một trong những lĩnh vực được quan tâm và có nhiều công trình được công bố, đó là nghiên cứu tính nửa liên tục, liên tục của ánh xạ nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan.

Bất đẳng thức Ky Fan [15] (hay còn được gọi là bài toán cân bằng [6]) là bài toán tìm $\overline{x} \in D \subset X$ sao cho

$$f(\overline{x}, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in D,$$

trong đó X là không gian véc tơ tôpô lồi địa phương thực, $D \subset X$ là tập khác rỗng và $f : D \times D \to \mathbb{R}$ (đường thẳng số) là hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in D$. Điểm $\overline{x}$ được gọi là điểm cân bằng.

Bằng cách chọn hàm f một cách phù hợp (xem [3, 6, 15]), ta thấy rằng bài toán này chứa đựng các bài toán trên như những trường hợp riêng:

1. Bài toán tối ưu là bài toán tìm $\overline{x} \in D$ sao cho

$$g(\overline{x}) \leq g(x) \text{ với mọi } x \in D,$$

   trong đó $g : D \to \mathbb{R}$ là hàm số, và hàm f được chọn là $g(y) - g(x)$ với mọi $x, y \in D$.

2. Bài toán bất đẳng thức biến phân là bài toán tìm $\overline{x} \in D$ sao cho

$$< T(\overline{x}), \overline{x} - y > \geq 0 \text{ với mọi } y \in D,$$

   trong đó X^* là không gian đối ngẫu của X, $T : D \to X^*$ là ánh xạ, $< x^*, x >$ là giá trị của phiếm hàm $x^* \in X^*$ tại x. Ở đây hàm f được chọn là $< T(x), x - y >$ với mọi $x, y \in D$.

3. Bài toán điểm bất động là bài toán tìm $\overline{x} \in D$ sao cho

$$T\overline{x} = \overline{x},$$

trong đó X là không gian Hilbert, $T : D \to D$ là ánh xạ đơn trị, và hàm f được chọn là $< T(x) - x, x - y >$ với mọi $x, y \in D$. Điểm $\overline{x}$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ T.

4. Bài toán cân bằng Nash là bài toán tìm $\overline{x} = (\overline{x}_i)_{i \in I} \in D$ sao cho

$$f_i(\overline{x}) \leq f_i(\overline{x}^i, y_i) \text{ với mọi } y_i \in D_i,$$

trong đó $f_i : D \to \mathbb{R}$ là các hàm số, $x = (x_i)_{i \in I} \in D$ với $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$, $D = \Pi_{i \in I} D_i$ với $D_i, i \in I$, là các tập con khác rỗng trong X, I là tập hữu hạn các phần tử. Hàm f được chọn là $\sum_{i \in I}(f_i(x^i, y_i) - f_i(x))$. Điểm $\overline{x}$ được gọi là điểm cân bằng Nash.

5. Bài toán điểm yên ngựa là bài toán tìm điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in D_1 \times D_2$ sao cho

$$\varphi(\overline{x}_1, y_2) \leq \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq \varphi(y_1, \overline{x}_2) \text{ với mọi } (y_1, y_2) \in D_1 \times D_2,$$

trong đó $D_1, D_2 \subset X$, $\varphi : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ là hàm số, $D = D_1 \times D_2$ và hàm $f : D \times D \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $\varphi(y_1, x_2) - \varphi(x_1, y_2)$ với $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in D_1 \times D_2$. Điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ được gọi là điểm yên ngựa.

6. Bài toán bù là bài toán tìm điểm $\overline{x} \in X$ sao cho

$$\overline{x} \in C, T\overline{x} \in C^* \text{ và } < T\overline{x}, \overline{x} >= 0,$$

trong đó C là nón lồi, đóng trong X, $C^* = \{x^* \in X^* | < x, x^* >\geq 0 \ \forall x \in C\}$ là nón cực của C, $T : C \to X^*$ là ánh xạ đơn trị với X^* là không gian tôpô đối ngẫu của X. Hàm f được chọn là $< Tx, y - x >$ với $x, y \in C$.

7. Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị là bài toán tìm $\overline{x} \in X, \overline{\xi} \in X^*$ sao cho

$$\overline{x} \in D, \overline{\xi} \in T\overline{x} \text{ và } < \overline{\xi}, y - \overline{x} >\geqslant 0 \text{ với mọi } y \in D,$$

trong đó $T : D \to 2^{X^*}$ là ánh xạ đa trị với giả thiết $T(x)$ là tập compact, lồi, khác rỗng trong X^* với mọi $x \in D$. Hàm f được chọn là $\max_{\xi \in Tx} < \xi, y - x >$ với $x, y \in D$.

Luận văn này xét các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng không yếu. Đây là các dạng mở rộng của bất đẳng thức Ky Fan và được phát biểu như sau: Giả sử T và K là không gian tôpô Hausdorff, $A_i : T \times K \rightrightarrows K$, $i = 0, 1$, là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, Y là không gian véc tơ tôpô lồi địa phương, $C : T \times K \times K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho mỗi giá trị của C là nón lồi, chính thường (tức là, $C \neq \{0\}$ và $C \neq X$) và đóng với $intC \neq \emptyset$, $F : T \times K \times K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng. Với mỗi $t \in T$, ta xét các bài toán sau:

Bài toán ($\mathbf{P_t^1}$) : Tìm $x \in K$ sao cho $x \in A_0(t, x)$ và với mọi $\eta \in A_1(t, x)$,

$$F(t, x, \eta) \cap (-C(t, x, \eta)) \neq \emptyset.$$

Bài toán ($\mathbf{P_t^2}$) : Tìm $x \in K$ sao cho $x \in A_0(t, x)$ và với mọi $\eta \in A_1(t, x)$,

$$F(t, x, \eta) \subset -C(t, x, \eta).$$

Nội dung chính của luận văn là nghiên cứu tính liên tục của ánh xạ nghiệm không yếu của bất đẳng thức véc tơ Ky Fan bằng phương pháp vô hướng hóa phi tuyến. Trong quá trình nghiên cứu tính nửa liên tục, liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng véc tơ suy rộng thì phương pháp vô hướng hóa tuyến tính là một công cụ rất hiệu quả, đặc biệt đối với tính nửa liên tục dưới. Cụ thể là trong [10], phương pháp này đã được sử dụng cho bất đẳng thức biến phân véc tơ yếu phụ thuộc tham số trong không gian hữu hạn chiều, và trong [7, 12] đối với bài toán cân bằng véc tơ yếu phụ thuộc tham số trong không gian véc tơ tôpô. Tuy nhiên, phương pháp vô hướng hóa tuyến tính được dùng trong [7, 10, 12] đòi hỏi giả thiết lồi theo nón và điều kiện đơn điệu nghiêm ngặt của ánh xạ đa trị. Nhằm tránh sự bất tiện này, phương pháp vô hướng hóa phi tuyến đã được sử dụng để nghiên cứu tính ổn định của ánh xạ nghiệm của các bài toán bất đẳng thức Ky Fan suy rộng. Cụ thể, trong [20] phương pháp này đã được áp dụng cho trường hợp nghiệm yếu. Trong [21] nó được mở rộng hơn cho trường hợp tổng quát và đã thu được các kết quả về tính nửa liên tục, liên tục của ánh xạ nghiệm. Trong luận văn này, chúng ta dùng phương pháp vô hướng hóa phi tuyến như trong [21], nhưng ta có được các kết quả mới khác với các kết quả tương ứng trong [21]. Giả thiết chính là điều kiện (ii) của Định lý 3.1. Giả thiết này khác với các giả thiết thường được dùng trong các bài báo gần đây (xem Điều kiện H_2 trong Định lý 4.2 của [20], Điều kiện (4) trong Hệ quả 5.3 của [16]). Kết quả chính của luận văn này được thể hiện trong Định lý 3.1 cùng một số Hệ quả của nó. Ở mục cuối chúng ta đưa ra các kết quả khác về tính liên tục, trong đó các giả thiết được biểu diễn thông qua ánh xạ $C^+(\cdot)$, có các giá trị được xây dựng từ nón đối ngẫu không âm của các giá trị của C. Lợi thế của việc dùng ánh xạ này là nó cho phép xây dựng hàm vô hướng hóa phi tuyến mà không cần tới các định nghĩa ban đầu (cụ thể, công thức $(3.7), (3.8)$). Hơn nữa, nó cho phép ta đưa ra thêm các điều kiện mới (xem Hệ quả $3.12 - 3.14$). Điều đáng chú ý là trong trường hợp $Y = \mathbb{R}$ (đường thẳng thực) và $C(t, x, \eta) \equiv \mathbb{R}_+$(tập các số không âm), bài toán (P_t^1) có thể được xem là một bài toán trong [8, 18]. Ví dụ 3.3 đã chỉ ra rằng các điều kiện của chúng ta có thể áp dụng cho trường hợp đặc biệt này để đưa đến các kết quả về tính liên tục như mong muốn, trong khi các phương pháp vô hướng hóa tuyến tính trong [8, 18] là không thể.

Luận văn gồm ba chương.

Chương 1: "Kiến thức chuẩn bị" trình bày một số định nghĩa và kết quả sẽ được sử dụng trong Chương 2 và Chương 3. Đó là các khái niệm và tính chất cơ bản của không gian tôpô, không gian véc tơ tôpô, các định lý, mệnh đề về tính nửa liên tục, liên tục của ánh xạ đa trị.

Chương 2: "Hàm vô hướng hóa phi tuyến" trình bày định nghĩa, tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến.

Chương 3: "Sự liên tục của ánh xạ nghiệm không yếu của bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng" trình bày bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng không yếu, đưa ra các điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm của bài toán đó là liên tục. Đồng thời mở rộng một số dữ kiện của bài toán để có các kết quả khác về tính liên tục.

Luận văn được trình bày trên cơ sở bài báo sau đây (và một số tài liệu đã liệt kê trong bài báo đó): "P.H.Sach, N.B. Minh (2013), *Continuity of solution mappings in some parametric non-weak vector Ky Fan inequalities*, J. Glob Optim. Theory Appl, $(57), 1401 - 1418$" (xem [22]).

Tác giả luận văn đã đưa vào những ví dụ mới (Ví dụ 3.1, Ví dụ 3.2, Ví dụ 3.3) để minh họa cho một số kết quả (trong Bổ đề 3.1, Hệ quả 3.1, Hệ quả 3.14) của luận văn.

Luận văn được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Phạm Hữu Sách.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy Phạm Hữu Sách đã luôn tận tình

hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô của Viện Toán học đã dạy dỗ, quan tâm tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện.

Do thời gian và kiến thức còn nhiều hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý và các ý kiến phản biện của quý Thầy, Cô và bạn đọc.

Hà Nội, tháng 8 năm 2015

Vũ Thị Ngân

DANH MỤC KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$	đường thẳng thực
$\mathbb{R}_+$	nửa đường thẳng thực không âm
$\mathbb{R}^2$	không gian Euclide 2-chiều
$\mathbb{R}^2_+$	tập các véc tơ có các thành phần không âm của $\mathbb{R}^2$
$x \in M$	phần tử x thuộc M
$y \notin M$	phần tử y không thuộc M
$\emptyset$	tập rỗng
2^X	tập tất cả các tập con của X
$M \subset N$	M là tập con của N
$M \cap N$	giao của hai tập M và N
$M \setminus N$	tập các điểm thuộc M nhưng không thuộc N
$M \times N$	tích Đề-các của hai tập M và N
$M + N$	tổng của hai tập M và N
λM	vị tự tập M theo tỉ số $\lambda \in \mathbb{R}$ trong không gian véc tơ
$\forall\, x$	với mọi x
$\exists\, x$	tồn tại x
$\inf_{x\in K} f(x)$	infimum của tập $\{f(x) : x \in K\}$
$\sup_{x\in K} f(x)$	supremum của tập $\{f(x) : x \in K\}$
$intD$	phần trong của tập D
t.ư.	tương ứng

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian véc tơ tôpô, và lý thuyết ánh xạ đa trị. Ngoài ra còn có một số mệnh đề, và định lý quan trọng về tính nửa liên tục của ánh xạ đa trị được sử dụng trong các chứng minh của chương tiếp theo.

1.1 Không gian véc tơ tôpô

Định nghĩa 1.1. (xem [13], trang 16) Cho tập $X \neq \emptyset$. Ta nói rằng X là *không gian véc tơ thực* nếu X cùng với phép toán cộng $(+ : X \times X \longrightarrow X)$ và phép toán nhân vô hướng $(\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $\forall\, x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ (tính chất kết hợp),

(2) $\forall\, x, y \in X : x + y = y + x$ (tính chất giao hoán),

(3) $\exists\, 0 \in X, \forall\, x \in X : x + 0 = x$ (phần tử không),

(4) $\forall\, x \in X, \exists\, x' \in X : x + x' = 0$ ta viết $x' = -x$,

(5) $\forall\, x, y \in X, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(6) $\forall\, x \in X, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

(7) $\forall\, x \in X, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

(8) $\forall\, x \in X : 1.x = x$ (phần tử đơn vị).

Định nghĩa 1.2. (xem [13], trang 20) Cho tập $X \neq \emptyset$, gọi 2^X là tập tất cả các tập con của X và $\tau \subset 2^X$. Cặp (X, τ) được gọi là *không gian tôpô* nếu họ τ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\emptyset \in \tau$ và $X \in \tau$,

(ii) Nếu $U_1, U_2 \in \tau$ thì $U_1 \cap U_2 \in \tau$,

(iii) Nếu $U_s \in \tau$ với mọi $s \in S$, S là một tập chỉ số bất kì, thì $\bigcup_{s \in S} U_s \in \tau$.

Khi đó, các tập thuộc họ τ gọi là tập mở.

Định nghĩa 1.3. (xem [13], trang 22) Cho (X, τ) là không gian tôpô và $x \in X$. Tập con U của không gian tôpô X gọi là *lân cận* của x nếu có một tập mở G sao cho $x \in G \subset U$. Họ tất cả các lân cận của x được ký hiệu là $\mathcal{N}_\tau(x)$ hay đơn giản là $\mathcal{N}(x)$. Một tập con $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ được gọi là *một cơ sở lân cận* của x nếu với mọi $U \in \mathcal{N}(x)$ tồn tại $V \in \mathcal{B}(x)$ sao cho $V \subset U$.

Định nghĩa 1.4. (xem [13], trang 2) Cho I là một tập khác rỗng, mỗi tập con khác rỗng $\mathcal{R}$ của $I \times I$ được gọi là *một quan hệ hai ngôi* trên I. Nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên I và cặp $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ thì ta ký hiệu $x_1 \mathcal{R} x_2$. Ta nói rằng $\mathcal{R}$ là *sắp thứ tự trên I* nếu $\mathcal{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

(a) *phản xạ* nếu $\forall\, x \in I : x\mathcal{R}x$.

(b) *phản đối xứng* nếu $\forall\, x_1, x_2 \in I : x_1\mathcal{R}x_2,\ x_2\mathcal{R}x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(c) *bắc cầu* nếu $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I : x_1\mathcal{R}x_2, x_2\mathcal{R}x_3 \Rightarrow x_1\mathcal{R}x_3$.

Quan hệ thứ tự $\mathcal{R}$ được gọi là *quan hệ thứ tự toàn phần trên I* nếu với hai phần tử bất kỳ $a, b \in I$ một trong hai quan hệ $a\mathcal{R}b$ hoặc $b\mathcal{R}a$ xảy ra. Trong trường hợp ngược lại $\mathcal{R}$ được gọi là *quan hệ thứ tự từng phần trên I.*

Định nghĩa 1.5. (xem [13], trang 22)

(i) Một tập khác rỗng I được *định hướng* bởi $\succeq$ nếu $\succeq$ là sắp thứ tự từng phần trên I và với mỗi cặp $\alpha, \beta \in I$, tồn tại $\gamma \in I$ sao cho $\gamma \succeq \alpha$ và $\gamma \succeq \beta$.

(ii) Một tập con J của tập định hướng $(I, \succeq)$ được gọi là *cùng đuôi* nếu với mọi $i \in I$ tồn tại $j \in J$ sao cho $j \succeq i$. Khi đó, $(J, \succeq)$ được định hướng nếu J là một tập con cùng đuôi của I.

Định nghĩa 1.6. (xem [13], trang 22) Cho X là một tập khác rỗng bất kỳ, ánh xạ $\varphi : I \longrightarrow X$, ở đó $(I, \succeq)$ là một tập định hướng, được gọi là *một lưới* hay *một dãy suy rộng* của X. Lưới φ được ký hiệu bởi $(x_i)_{i\in I}$, ở đó $x_i = \varphi(i)$.

Định nghĩa 1.7. (xem [13], trang 22) Cho (X, τ) là một không gian tôpô, lưới $(x_i)_{i\in I} \subset X$ *hội tụ* tới $x \in X$ nếu với mọi lân cận V của x, tồn tại $i_V \in I$ sao cho $x_i \in V$ với mọi $i \succeq i_V$. Ký hiệu là $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \longrightarrow x$ hoặc đơn giản là $x_\alpha \longrightarrow x$ và x được gọi là giới hạn của (x_i).

Định nghĩa 1.8. (xem [13], trang 23) Lưới $(y_k)_{k\in K}$ được gọi là một *lưới con* của lưới $(x_i)_{i\in I}$ nếu tồn tại một ánh xạ $\psi : (K, \succ) \longrightarrow (I, \succeq)$ sao cho $y_k = x_{\psi(k)}$ với mọi $k \in K$ và với mọi $i \in I$ tồn tại $k_i \in K$ sao cho $\psi(k) \succeq i$ với $k \succ k_i$. Nếu J là một tập con cùng đuôi của tập định hướng $(I, \succeq)$, khi đó $(x_j)_{j\in I}$ là một lưới con của lưới $(x_i)_{i\in I}$.

Định nghĩa 1.9. (xem [13], trang 21) Cho không gian tôpô (X, τ), tập $A \subset X$ và $x \in A$, x là *điểm trong* của A nếu tồn tại một lân cận U của x sao cho $U \subset A$. Do đó, A là tập mở khi và chỉ khi với mọi $x \in A$ thì x là điểm trong của A.

Định nghĩa 1.10. (xem [13], trang 21) Cho không gian tôpô (X, τ).

(i) Tập $A \subset X$ được gọi là *tập đóng* nếu phần bù $X \setminus A$ là một tập mở trong X.

(ii) Tập $A \subset X$ được gọi là *bị chặn* nếu với mỗi lân cận V cho trước tồn tại một số $\alpha > 0$ sao cho $A \subset \alpha V$.

Định nghĩa 1.11. (xem [13], trang 21) Cho không gian tôpô (X, τ) và tập $A \subset X$. Hợp của tất cả các tập mở chứa trong A gọi là *phần trong* của A, ký hiệu là $intA$. Như vậy, $intA$ là tập mở lớn nhất chứa trong A.

Định lý 1.1. (xem [1], trang 383) *Cho X là một không gian tôpô và $M \subset X$. M là compact nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn một trong hai điều kiện*

(i) *Mọi phủ mở của M đều chứa một phủ con hữu hạn.*

(ii) *Bất kỳ họ tập đóng nào trong X mà có giao không cắt M thì phải chứa một họ con hữu hạn vẫn có giao không cắt M.*

Định nghĩa 1.12. (xem [13], trang 23) Không gian tôpô (X, τ) được gọi là *không gian Hausdorff* nếu với hai phần tử $x_1 \neq x_2$ bất kỳ của X luôn tồn tại hai lân cận V_1, V_2 của x_1 và x_2 sao cho $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Định nghĩa 1.13. (xem [13], trang 24) Cho X là không gian véc tơ và trên X có trang bị cấu trúc tôpô τ. Ta nói, cấu trúc tuyến tính *tương hợp* với cấu trúc tôpô τ nếu các phép toán tuyến tính là liên tục đối với tôpô đó, tức là

(i) Với mọi $x, y \in X$ và với mọi lân cận V của $x + y$ luôn tồn tại lân cận U_x của x và U_y của y sao cho nếu $x' \in U_x, y' \in U_y$ thì $x' + y' \in V$;

(ii) Với mọi $x \in X$,$\lambda \in \mathbb{R}$ và với mọi lân cận V của λx luôn tồn tại lân cận U_x của x và một số $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $x' \in U_x$ và $|\lambda' - \lambda| < \varepsilon$ thì $\lambda' x' \in V$.

Không gian tuyến tính X trên đó có một cấu trúc tuyến tính tương hợp với cấu trúc tôpô gọi là *không gian véc tơ tôpô* (hay *không gian tuyến tính tôpô*).

Định nghĩa 1.14. (xem [1], trang 211) Cho không gian véc tơ tôpô X. Một hàm số $f(x)$ xác định trên X và lấy giá trị là số thực, gọi là một *phiếm hàm* trên X.

(a) Phiếm hàm f được gọi là *tuyến tính* nếu:

(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in X$;

(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ với mọi $x \in X$ và với mọi số α.

(b) Phiếm hàm f được gọi là *liên tục tại* $x_0 \in X$ nếu với mọi lân cận U_{y_0} của điểm $y_0 = f(x_0)$, đều có một lân cận V_{x_0} của điểm x_0 sao cho $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$. Phiếm hàm đó gọi là *liên tục* nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in X$.

Định nghĩa 1.15. (xem [1], trang 404) Cho X là không gian véc tơ tôpô. Tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X gọi là *không gian liên hợp* (hay *không gian đối ngẫu*) của X và được ký hiệu X^*. Đó là một không gian véc tơ, với các phép toán tự nhiên:

(i) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

(ii) $(f_1\alpha)x = \alpha f_1(x)$.

Định nghĩa 1.16. (xem [13], trang 17) Cho X là không gian véc tơ tôpô và tập $C \subset X$.

(i) C được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$ thì $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

(ii) C được gọi là *nón* nếu với mọi $x \in C$ và $\lambda \in \mathbb{R}_+$ thì $\lambda x \in C$.

(iii) Nón C được gọi là chính thường nếu $C \neq X$ và $C \neq \{0\}$.

Nhận xét 1.1. Tập $C \subset X$ được gọi là nón lồi nếu nó vừa là tập lồi và vừa là nón, tức là $\lambda C \subset C$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}_+$ và $C + C \subset C$. Thêm nữa, ta luôn có $C + intC \subset intC$ với $intC \neq \emptyset$.

Định nghĩa 1.17. (xem [13], trang 27) Một không gian véc tơ tôpô X được gọi là *không gian tôpô lồi địa phương* (và tôpô của nó gọi là *tôpô lồi địa phương*) nếu trong X có một cơ sở lân cận (của gốc) gồm toàn tập lồi.

Định lý 1.2. (xem [11], trang 417) *Cho A, B là hai tập lồi khác rỗng và rời nhau của không gian véc tơ tôpô lồi địa phương X. Nếu A là tập compact và B là tập đóng thì tồn tại hằng số c, $\epsilon > 0$ và một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X sao cho*

$$f(a) \leq c - \epsilon < c < f(b) \text{ với mọi } a \in A, b \in B.$$

1.2 Ánh xạ đa trị

Định nghĩa 1.18. (xem [2], trang 9) Cho X, Y là hai tập bất kỳ. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ từ tập X vào tập gồm toàn bộ tập các tập con của Y (được ký hiệu là 2^Y). Ta nói F là *ánh xạ đa trị* từ X vào Y. Như vậy, ứng với mỗi phần tử của X với một tập con của Y. Ký hiệu là $F : X \rightrightarrows Y$ hoặc $F : X \longrightarrow 2^Y$.

Định nghĩa 1.19. (xem [2], trang 9) *Miền hữu hiệu của ánh xạ đa trị* F là tập hợp tất cả các $x \in X$ sao cho $F(x) \neq \emptyset$, ký hiệu là $domF$,

$$domF := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

Định nghĩa 1.20. (xem [2], trang 10) *Miền ảnh của ánh xạ đa trị* F là hợp tất cả các giá trị $F(x)$ khi x chạy khắp X, ký hiệu là imF,

$$imF := F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Định nghĩa 1.21. (xem [2], trang 10) *Đồ thị của ánh xạ đa trị* F là tập hợp tất cả các điểm $(x, y) \in X \times Y$ sao cho $y \in F(x)$, ký hiệu là grF,

$$grF := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Định nghĩa 1.22. Giả sử $F, F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y và $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
&(F_1 + F_2)(\cdot) = F_1(\cdot) + F_2(\cdot),\\
&(F_1 - F_2)(\cdot) = F_1(\cdot) - F_2(\cdot),\\
&(\lambda F)(\cdot) = \lambda F(\cdot).
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.23. (xem [2], trang 11) Giả sử $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y. Khi đó, F là ánh xạ đóng (t.ư.mở) nếu grF là tập đóng (t.ư.mở) trong $X \times Y$.

Định nghĩa 1.24. (xem [2], trang 11) Ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ được gọi là có giá trị đóng (t.ư. mở, lồi, compact...) nếu và chỉ nếu, với mỗi $x \in X$, đều có $F(x)$ là tập đóng (t.ư. mở, lồi, compact...) trong Y.

Nhận xét 1.2. *Ánh xạ đóng thì có giá trị đóng. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng.*

Ví dụ 1.1. *Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \textit{nếu } x \leq 0, \\ [0,1] & \textit{nếu } x > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Khi đó, F là ánh xạ có giá trị đóng tuy nhiên F không là ánh xạ đóng.

1.3 Tính liên tục của ánh xạ đa trị

Cho X, Y là không gian tôpô và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng.

Định nghĩa 1.25. (xem [2], trang 19) Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục trên tại $x_0 \in domF$* nếu với mọi tập mở $N \subset Y$ mà $F(x_0) \subset N$ thì tồn tại lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho $F(x) \subset N$ với mọi $x \in U(x_0)$. Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục trên trong $X' \subset domF$* nếu F là nửa liên tục trên tại mọi điểm $x \in X'$. Trong trường hợp $X' = X = domF$, ta nói đơn giản rằng, F là nửa liên tục trên.

Ví dụ 1.2. *Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \textit{nếu } x > 0, \\ \{-1\} & \textit{nếu } x < 0, \\ [-1,1] & \textit{nếu } x = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Khi đó, F là nửa liên tục trên tại $x = 0$.

Định nghĩa 1.26. (xem [2], trang 19) Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục dưới tại* $x_0 \in domF$ nếu với mọi tập mở $N \subset Y$ mà $F(x_0) \cap N \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho $F(x) \cap N \neq \emptyset$ với mọi $x \in U(x_0) \cap domF$.

Ta nhắc lại một cách định nghĩa khác về tính nửa liên tục dưới của F tại x_0 như sau:

Định nghĩa 1.27. (xem [13], trang 51) Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục dưới tại* $(x_0, y_0) \in grF$ nếu với mọi tập mở N chứa điểm y_0 thì tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho $F(x) \cap N \neq \emptyset$ với mọi $x \in U(x_0) \cap domF$. Khi đó, ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục dưới tại* $x_0 \in domF$ nếu nó là nửa liên tục dưới tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in grF$.

Định nghĩa 1.28. (xem [2], trang 19) Ánh xạ đa trị F được gọi là *nửa liên tục dưới trong* $X' \subset domF$ nếu F nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in X'$. Trong trường hợp $X' = X = domF$, ta nói đơn giản rằng, F là nửa liên tục dưới.

Ví dụ 1.3. *Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } x = 0, \\ [0,1] & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Khi đó, F là nửa liên tục dưới tại $x = 0$.

Định nghĩa 1.29. (xem [2], trang 20) Ánh xạ đa trị F được gọi là *liên tục tại* $x_0 \in domX$ nếu F đồng thời nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x_0. Ánh xạ đa trị F được gọi là *liên tục trong* $X' \subset domF$ nếu F liên tục tại mọi điểm $x \in X'$. Trong trường hợp $X' = X = domF$, ta nói đơn giản rằng, F là liên tục.

Định lý 1.3. (xem [4], trang 67) *Giả sử X, Y là không gian tôpô và giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ánh xạ f là nửa liên tục dưới trong $X \times Y$;*

(ii) *Ánh xạ đa trị $S : X \rightrightarrows Y$ là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$;*

(iii) *$S(x_0)$ là tập compact và $S(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in X$.*

Khi đó, hàm $\alpha : x \mapsto \alpha(x) = \inf_{y\in S(x)} f(x,y)$ *là nửa liên tục dưới tại* x_0.

Định lý 1.4. (xem [4], trang 69) *Giả sử* X, Y *là không gian tôpô và giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ánh xạ* f *là nửa liên tục trên trong* $X \times Y$*;*

(ii) *Ánh xạ đa trị* $S : X \rightrightarrows Y$ *là nửa liên tục dưới tại* $x_0 \in X$*;*

(iii) $S(x) \neq \emptyset$ *với mọi* $x \in X$.

Khi đó, hàm $\alpha : x \mapsto \alpha(x) = \inf_{y\in S(x)} f(x,y)$ *là nửa liên tục trên tại* x_0.

Từ Định lý 1.3 và Định lý 1.4 ta có kết quả sau:

Định lý 1.5. *Cho* X, Y *là không gian tôpô và cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Ánh xạ* $s : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *(đường thẳng thực) là một hàm liên tục.*

(ii) *Ánh xạ đa trị* $\psi : X \rightrightarrows Y$ *là liên tục có giá trị compact khác rỗng.*

Khi đó, hàm $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *xác định bởi* $f(x) = \sup_{x\in\psi(y)} s(x,y)$ *là liên tục.*

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm về C-nửa liên tục của ánh xạ đa trị. Giả sử X là không gian tôpô, Y là không gian véc tơ tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng và $C : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị mà giá trị là nón lồi.

Định nghĩa 1.30. (xem [19], trang 1058) Ánh xạ đa trị F được gọi là *C-nửa liên tục trên tại* $x_0 \in domF$ nếu với mọi tập mở $N \subset Y$ mà $F(x_0) \subset N$ thì tồn tại lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho $F(x) \subset N + C(x)$ với mọi $x \in U(x_0)$. Ánh xạ đa trị F được gọi là *C-nửa liên tục trên trong* $X' \subset domF$ nếu F là C-nửa liên tục trên tại mọi $x \in X'$. Trong trường hợp $X' = X = domF$, ta nói đơn giản rằng, F là C-nửa liên tục trên.

Định nghĩa 1.31. (xem [19], trang 1058) Ánh xạ đa trị F được gọi là *C-nửa liên tục dưới tại* $x_0 \in domF$ nếu với mọi tập mở $N \subset Y$ mà $F(x_0) \cap N \neq \emptyset$ thì tồn tại lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho $F(x) \cap (N - C(x)) \neq \emptyset$ với mọi $x \in U(x_0)$. Ánh xạ đa trị F được gọi là *C-nửa liên tục dưới trong* $X' \subset domF$ nếu F là C-nửa liên tục dưới tại mọi $x \in X'$. Trong trường hợp $X' = X = domF$, ta nói đơn giản rằng, F là C-nửa liên tục dưới.

Nhận xét 1.3. Nếu F là nửa liên tục trên (t.ư.dưới) thì F là C-nửa liên tục trên (t.ư.dưới). Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 1.4. *Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ \{-1\} & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{1.4}$$

và cho $C(x) = \mathbb{R}_+$ nếu $x \in \mathbb{Q}$ và $C(x) = -\mathbb{R}_+$ nếu $x \notin \mathbb{Q}$.
Khi đó, F là C-nửa liên tục trên trong $\mathbb{R}$ nhưng F không nửa liên tục trên trong $\mathbb{R}$.

Sau đây, ta đưa ra một số kết quả về tính liên tục đã được chứng minh trong [21]. Giả sử K là không gian tôpô, Y là không gian véc tơ tôpô, $C : K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho với mọi $x \in K$, $C(x)$ là nón lồi, chính thường, đóng với $intC \neq \emptyset$, $E : K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng, compact sao cho $E \subset intC$, tức là $E(x) \subset intC(x)$ với mọi $x \in K$, $F, G : K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng và F, G có giá trị bị chặn, tức là với mọi $x \in K$ thì $F(x), G(x)$ là tập bị chặn trong Y. Hàm $s^i : K \rightrightarrows \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ được xác định như sau:

$$s^1(x) := min\{\lambda \in \mathbb{R} : F(x) \cap (\lambda E(x) + G(x) - C(x)) \neq \emptyset\};$$

$$s^2(x) := min\{\lambda \in \mathbb{R} : F(x) \subset (\lambda E(x) + G(x) - C(x))\}.$$

Mệnh đề 1.1. (xem [21], Hệ quả 3.1) *Giả sử $F - G$ có giá trị C- đóng (tức là với mọi $x \in K, F(x) - G(x) + C(x)$ là tập đóng).*

(i) *Nếu E là nửa liên tục trên, C có đồ thị đóng, F là C- nửa liên tục trên và có giá trị compact, G là $(-C)$- nửa liên tục trên và có giá trị compact thì s^1 là nửa liên tục dưới.*

(ii) *Nếu E là nửa liên tục dưới, $intC$ có đồ thị mở, F là C- nửa liên tục dưới, G là $(-C)$- nửa liên tục dưới thì s^1 là nửa liên tục trên.*

Mệnh đề 1.2. (xem [21], Hệ quả 3.2) *Giả sử G có giá trị $(-C)$- đóng (tức là với mỗi $x \in K$, $G(x) - C(x)$ là tập đóng).*

(i) *Nếu E là nửa liên tục trên, C có đồ thị đóng, F là $(-C)$- nửa liên tục dưới, G là $(-C)$- nửa liên tục trên và có giá trị compact thì s^2 là nửa liên tục dưới.*

(ii) *Nếu E là nửa liên tục dưới, $intC$ có đồ thị mở, F là $(-C)$- nửa liên tục trên, G là $(-C)$- nửa liên tục dưới thì s^2 là nửa liên tục trên.*

Bổ đề 1.1. (xem [21], Bổ đề 4.1) *Cho T và K là không gian tôpô Hausdorff, $\widehat{\psi} : T \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, $\widehat{f} : T \times K \to \mathbb{R}$ là hàm số, $S : T \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị được định nghĩa bởi*

$$S(t) := \{x \in \widehat{\psi}(t) : \widehat{f}(t, x) \geq 0\}, \; \forall \, t \in T.$$

Giả sử $t_0 \in domS$ và:

(i) *$\widehat{\psi}$ là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại t_0.*

(ii) *$\widehat{f}$ là nửa liên tục trên tại (t_0, x_0) với mọi $x_0 \in \widehat{\psi}(t_0)$.*

Khi đó, S là nửa liên tục trên tại t_0.

Trong phần cuối này, ta sẽ nhắc lại các mệnh đề thể hiện mối quan hệ giữa dãy suy rộng, tập compact và tính nửa liên tục của ánh xạ đa trị.

Mệnh đề 1.3. (xem [13], trang 54) *Ánh xạ đa trị F là nửa liên tục trên tại $x_0 \in domF$ nếu và chỉ nếu với mọi tập mở $N \subset Y$ mà $F(x_0) \subset N$ và với mọi dãy suy rộng $x_\alpha \in X$, $x_\alpha \to x_0$ thì tồn tại $\alpha_0 \geq \alpha$ sao cho $F(x_\alpha) \subset N$ với mọi $\alpha \geq \alpha_0$.*

Mệnh đề 1.4. (xem [13], trang 55) *Ánh xạ đa trị F nửa liên tục dưới tại $(x_0, y_0) \in X \times Y$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy suy rộng $x_\alpha \in X$, $x_\alpha \to x_0$ thì tồn tại dãy con x_β của dãy x_α và dãy suy rộng $y_\beta \in Y$, $y_\beta \to y_0$ sao cho $y_\beta \in F(x_\beta)$ với mọi β.*

Định nghĩa 1.32. (xem [13], trang 55) F là *ánh xạ đa trị compact tại* $x_0 \in X$ nếu với mọi dãy suy rộng $(x_\alpha, y_\alpha) \in grF$ mà $x_\alpha \to x_0$ thì tồn tại một dãy con y_β của dãy $y_\alpha \in Y$ mà $y_\beta \to y_0 \in F(x_0)$.

Mệnh đề 1.5. (xem [13], trang 56) *F là ánh xạ đa trị compact tại $x_0 \in X$ nếu và chỉ nếu $F(x_0)$ là tập compact và F là nửa liên tục trên tại x_0.*

Kết luận Chương 1

Nội dung chính của Chương 1 là:

1. Nhắc lại một số kiến thức về không gian tôpô, không gian véc tơ tôpô, không gian véc tơ tôpô lồi địa phương.
2. Nhắc lại một số khái niệm, mệnh đề, định lý và hệ quả về tính nửa liên tục, liên tục của ánh xạ đa trị.

Chương 2

HÀM VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN

Chương 2 trình bày khái niệm và một vài tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến. Đây sẽ là công cụ hiệu quả để tiếp cận đến tính liên tục của ánh xạ nghiệm không yếu của bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng.

2.1 Khái niệm hàm vô hướng hóa phi tuyến

Cho Y là không gian véc tơ tôpô lồi địa phương với đối ngẫu tôpô Y^* và $C \subset Y$ là nón lồi, chính thường, đóng với $intC \neq \emptyset$ và $e \in intC$. Ta luôn giả sử rằng $(-C) \cap intC = \emptyset$. Đặt

$$C^+ := \{y^* \in Y^* : < y^*, y > \geq 0, \forall\, y \in C\},$$
$$C_e^+ := \{y^* \in C^+ : < y^*, e > = 1\},$$

ở đó, $< y^*, y >$ là giá trị của $y^* \in Y^*$ tại $y \in Y$.

Nhận xét 2.1. Ta có $< y^*, e > > 0$ với mọi $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$. Thực vậy, giả sử với $y^* \neq 0$, $y^* \in C^+$ ta có $< y^*, e > \leq 0$. Do $e \in intC$ nên tồn tại một lân cân đối xứng U_0 của e sao cho $e + U_0 \subset C$. Vì $y^* \in C^+$ nên với mọi $u \in U_0$ ta có $< y^*, e + u > \geq 0$ hay $< y^*, u > \geq 0$. Mặt khác U_0 là lân cận đối xứng của e nên với mọi $u \in U_0$ ta cũng có $< y^*, -u > \geq 0$. Do đó, $< y^*, u > = 0$ với mọi $u \in U_0$. Lấy $y \in Y$ bất kỳ và $\lambda > 0$ sao cho $\lambda y \in U_0$. Khi đó $< y^*, \lambda y > = 0$, suy ra $< y^*, y > = 0$ với mọi $y \in Y$, hay $y^* = 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Ta đưa ra định nghĩa về hàm vô hướng hóa phi tuyến $s^i_Q, i = 1, 2$ như sau.

Định nghĩa 2.1. Cho Q là một tập bị chặn, khác rỗng. Đặt

$$\Lambda^1_Q := \{\lambda \in \mathbb{R} : \ Q \cap (\lambda e - C) \neq \emptyset\},$$
$$\Lambda^2_Q := \{\lambda \in \mathbb{R} : \ Q \subset \lambda e - C\},$$
$$s^i_Q := \inf\{\lambda : \ \lambda \in \Lambda^i_Q\}, \ i = 1, 2.$$

Nhận xét 2.2. Ta thấy rằng $\Lambda^2_Q \subset \Lambda^1_Q$ và do đó $s^2_Q \geq s^1_Q$. Nếu $y \in Y$, $Q = \{y\}$ thì $s^{'}(y) = s^1_Q = s^2_Q = min\{\lambda \in \mathbb{R} : y \in \lambda e - C\}$. Hàm $s^{'}(y)$ với $y \in Y$ được gọi là hàm Gerstewitz [9] và là trường hợp đặc biệt của s^i_Q, $i = 1, 2$.

2.2 Tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến

Trong phần này, ta luôn giả sử rằng Y là không gian véc tơ tôpô lồi địa phương với đối ngẫu tôpô Y^* và $C \subset Y$ là nón lồi, chính thường, đóng với $intC \neq \emptyset$. Cho $e \in intC$ và Q là một tập bị chặn khác rỗng.

Mệnh đề 2.1. *(xem [22], Mệnh đề 3.1) Giả sử $-C \cap intC = \emptyset$.*

(i) *Nếu $Q + C$ là tập đóng thì $s^1_Q = \min\{\lambda : \ \lambda \in \Lambda^1_Q\}$.*

(ii) *Nếu C là tập đóng thì $s^2_Q = \min\{\lambda : \ \lambda \in \Lambda^2_Q\}$.*

Chứng minh. Để chứng minh Mệnh đề 2.1, ta cần chỉ ra Λ^i_Q với $i = 1, 2$ là đóng và bị chặn dưới.

Giả sử phản chứng Λ^1_Q không bị chặn dưới. Khi đó, $\exists \ \lambda_k \in \Lambda^1_Q, k = 1, 2, ...$ mà $\lambda_k \longrightarrow -\infty$ khi $k \longrightarrow +\infty$. Lấy $q_k \in Q$ sao cho:

$$q_k \in \lambda_k e - C, \ \forall \ k = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

khi k đủ lớn, chia cả hai vế của (2.1) cho λ_k, ta được $\frac{q_k}{\lambda_k} \in e + C$. Vì Q là các tập bị chặn nên khi $\lambda_k \to -\infty$ thì $0 \in e + C$. Mà $e \subset intC$

$$\Rightarrow e + C \subset intC + C$$

$$\Rightarrow 0 \in intC + C$$
$$\Rightarrow -c \in intC$$
$$\Rightarrow (-C) \cap intC \neq \emptyset,$$

trong đó $c \in C$ là điểm thích hợp nào đó. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(-C) \cap intC = \emptyset$. Vậy Λ_Q^1 bị chặn dưới. Mặt khác, vì $\Lambda_Q^2 \subset \Lambda_Q^1$ nên Λ_Q^2 cũng là tập bị chặn dưới.

Từ định nghĩa Λ_Q^1 ta có:

$$\begin{aligned}\Lambda_Q^1 &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \ Q \cap (\lambda e - C) \neq \emptyset\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists\, q \in Q,\ q \in \lambda e - C\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists\, q \in Q,\ \lambda e \in q + C\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda e \in (Q + C)\}.\end{aligned}$$

Lấy một dãy (λ_n) bất kì trong Λ_Q^1, $n \in \mathbb{N}$ mà $\lambda_n \to \lambda_0$. Để chứng minh Λ_Q^1 là tập đóng, ta chỉ ra rằng $\lambda_0 \in \Lambda_Q^1$. Thực vậy, vì $\lambda_n \in \Lambda_Q^1$ nên $\lambda_n e \in (Q + C)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mặt khác, do $Q + C$ là tập đóng nên $\lambda_0 e \in Q + C$ hay $\lambda_0 \in \Lambda_Q^1$. Vậy Λ_Q^1 là tập đóng.

Ta lại có

$$\begin{aligned}\Lambda_Q^2 &= \{\lambda \in \mathbb{R} : Q \subset \lambda e - C\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall\, q \in Q,\ q \in \lambda e - C\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall\, q \in Q,\ \lambda e \in q + C\}\\ &= \bigcap_{q \in Q} \Lambda_q^1.\end{aligned}$$

Theo chứng minh trên $\Lambda_q^1, q \in Q$, là tập đóng. Vì Λ_Q^2 là giao của các tập đóng nên cũng là đóng. □

Mệnh đề 2.2. *(xem [22], Mệnh đề 3.2) Cho r là số thực, ta luôn có:*

(i) $r \leq s_Q^1 \ \Leftrightarrow\ Q \cap (re - intC) = \emptyset$.

(ii) *Nếu $Q + C$ là tập đóng, thì* $s_Q^1 \leq r \ \Leftrightarrow\ Q \cap (re - C) \neq \emptyset$.

(iii) *Nếu Q là tập compact, thì* $r \leq s_Q^2 \ \Leftrightarrow\ Q \not\subset re - intC$.

(iv) *Nếu C là tập đóng, thì* $s_Q^2 \leq r \ \Leftrightarrow\ Q \subset re - C$.

Chứng minh. (i) Xét $(i^{'}) : \ r > s_Q^1 \Leftrightarrow Q \cap (re - intC) \neq \emptyset$. Ta thấy rằng $(i^{'})$ tương đương với (i), nên để chứng minh (i) ta chứng minh $(i)^{'}$. Thực vậy, do định nghĩa của s_Q^1 nên tồn tại $r^{'} \in \Lambda_Q^1$ mà $s_Q^1 \leq r^{'} < r$. Vì $r^{'} \in \Lambda_Q^1$ nên tồn tại $q \in Q$ thỏa mãn $q \in r^{'}e - C$ hay $r^{'}e \in q + C$. Mặt khác, $(r - r^{'})e \in intC$. Nên ta có

$$
\begin{aligned}
re &= r^{'}e + (r - r^{'})e \\
&\in q + C + intC \\
&\subset q + intC.
\end{aligned}
$$

Vậy $Q \cap (re - intC) \neq \emptyset$.

Ngược lại, nếu $Q \cap (re - intC) \neq \emptyset$ thì tồn tại $q \in Q$ sao cho $q \in re - intC$ hay $re \in q + intC$. Mặt khác, ánh xạ $r \mapsto re$ là liên tục nên tồn tại $r' < r$ sao cho $q \in r'e - intC$, do đó $r' \in \Lambda_Q^1$. Vậy $s_Q^1 \leq r' < r$.

(ii) Vì $Q+C$ là tập đóng, nên theo Mệnh đề 2.1 ta có $s_Q^1 \in \Lambda_Q^1$ hay $Q \cap (s_Q^1 e - C) \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại $q \in Q$ sao cho $q \in s_Q^1 e - C$. Thêm nữa $(r - s_Q^1)e \in C$, nên

$$
\begin{aligned}
q &\in s_Q^1 e - C \\
&= re - (r - s_Q^1)e - C \\
&\subset re - C - C \\
&\subset re - C.
\end{aligned}
$$

Vậy $Q \cap (re - C) \neq \emptyset$.

Ngược lại, nếu $Q \cap (re - C) \neq \emptyset$ thì theo định nghĩa của Λ_Q^1 ta có $s_Q^1 \leq r$.

(iii) Giả sử Q là tập compact, thay vì chứng minh (iii) ta đi chứng minh hệ quả $(iii)^{'} : r > s_Q^2 \Leftrightarrow Q \subset re - intC$ của nó là đúng. Thực vậy, nếu $r > s_Q^2$, do định nghĩa của s_Q^2 nên tồn tại $r^{'} \in \Lambda_Q^2$ sao cho $r > r^{'} \geq s_Q^2$. Do $r^{'} \in \Lambda_Q^2$ nên với mọi $q \in Q$ ta có $q \in (r^{'}e - C)$ hay $r^{'}e \in q + C$. Mặt khác, vì $r > r^{'}$ nên $(r - r^{'})e \in intC$. Suy ra,

$$
\begin{aligned}
re &= r^{'}e + (r - r^{'})e \\
&\in q + C + intC \\
&\subset q + intC.
\end{aligned}
$$

Vì điều này đúng với mọi $q \in Q$ nên $Q \subset re - intC$.

Ngược lại, giả sử $Q \subset re - intC$. Xét ánh xạ đa trị $\phi : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$ xác định bởi $\phi(r') = r'e - intC$ với $r' \in \mathbb{R}$. Khi đó, $(r, Q) \subset gr\phi$. Mặt khác, ϕ có đồ thị mở và Q là tập compact nên với mọi $r' < r$ và r' đủ gần r thì $(r', Q) \subset gr\phi$. Suy ra $Q \subset r'e - intC$. Vậy $s_Q^2 \leq r' < r$.

(iv) Do C là tập đóng nên theo Mệnh đề 2.1 $s_Q^2 \in \Lambda_Q^2$ hay $Q \subset s_Q^2 e - C$. Khi đó với mọi $q \in Q$ ta có $q \in s_Q^2 e - C$. Mặt khác vì $r \geq s_Q^2$ nên $(r - s_Q^2)e \in C$. Suy ra,

$$\begin{aligned} q &\in re - (r - s_Q^2)e - C \\ &= re - C - (r - s_Q^2)e \\ &\subset re - C - C \\ &\subset re - C. \end{aligned}$$

Vì điều này đúng với mọi $q \in Q$ nên $Q \subset re - C$.

Ngược lại, nếu $Q \subset re - C$ thì theo định nghĩa Λ_Q^2 ta có $r \in \Lambda_Q^2$. Vậy $s_Q^2 \leq r$. □

Nhận xét 2.3. Khi $Y = \mathbb{R}$, đặt $C = \mathbb{R}_+$, $e = 1 \in int\mathbb{R}_+$. Do đó, nếu Q' là một tập con bị chặn của $Y = \mathbb{R}$ thì

$$s_{Q'}^1 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : Q' \cap (1.\lambda - \mathbb{R}_+) \neq \emptyset\} = \inf Q'. \tag{2.2}$$

Mệnh đề 2.3. *(xem [22], Mệnh đề 3.3) Ta có*

$$\overline{s}_Q^1 := \sup_{y^* \in C_e^+} \inf_{q \in Q} < y^*, q > \leq s_Q^1.$$

Dấu bằng xảy ra nếu $Q + C$ là tập lồi đóng.

Chứng minh. Với mỗi $y^* \in C_e^+$, ta có $y^*Q := \{< y^*, y >: y \in Q\}$ là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}$. Áp dụng định nghĩa của $\Lambda_{Q'}^1$ trong trường hợp $C = \mathbb{R}_+ \subset Y = \mathbb{R}$, $e = 1 \in int\mathbb{R}_+$, $Q' = y^*Q$, ta được

$$\Lambda_{Q'}^1 = \{\lambda \in \mathbb{R} : [y^*Q] \cap [1.\lambda - \mathbb{R}_+] \neq \emptyset\}.$$

Ta thấy rằng $\Lambda_Q^1 \subset \Lambda_{y^*Q}^1$. Thực vậy, với mọi $\lambda \in \Lambda_Q^1$ ta có $Q \cap (\lambda e - C) \neq \emptyset$. Do đó, tồn tại $q \in Q$ sao cho $q \in \lambda e - C$. Khi đó,

$$< y^*, q > \in \lambda < y^*, e > - \{< y^*, y > : y \in C\} \in \lambda - \mathbb{R}_+.$$

Hay $y^*Q \cap [\lambda - \mathbb{R}_+] \neq \emptyset$, điều này tương đương với $\lambda \in \Lambda_{y^*Q}^1$. Vậy $\Lambda_Q^1 \subset \Lambda_{y^*Q}^1$. Cho nên,

$$\inf\{\lambda : \lambda \in \Lambda_{y*Q}^1\} \leq \inf\{\lambda : \lambda \in \Lambda_Q^1\}.$$

Áp dụng (2.2) với $Q' = y^*Q$, ta được $\inf_{y\in Q} < y^*, y > \leq s_Q^1$. Vì điều này đúng với mọi $y^* \in C_e^+$, ta có $\sup_{y^*\in C_e^+} \inf_{y\in Q} < y^*, y > \leq s_Q^1$ hay $\overline{s}_Q^1 \leq s_Q^1$.

Giả sử rằng $Q + C$ là tập lồi, đóng, nhưng bất đẳng thức trên không xảy ra dấu bằng, tức là $\overline{s}_Q^1 < s_Q^1$. Khi đó $\exists\, r \in \mathbb{R}$ sao cho $\overline{s}_Q^1 < r < s_Q^1$. Áp dụng Mệnh đề 2.2($ii$), ta có $Q \cap [re - C] \neq \emptyset$ hay $re \notin Q + C$. Bởi Định lý 1.2, ta có thể tìm được $0 \neq y^* \in Y^*$ sao cho:

$$< y^*, re > < \inf\{< y^*, q + c > : q \in Q, c \in C\}. \tag{2.3}$$

Từ điều này cho thấy $y^* \in C^+$ và $r < y^*, e > < \inf_{q\in Q} < y^*, q >$. Chia cả hai vế (2.3) cho $< y^*, e >$ ta được:

$$r < \inf_{q\in Q} < \frac{y^*}{< y^*, e >}, q > .$$

Đặt $\overline{y}^*$ bởi $\dfrac{y^*}{< y^*, e >}$, ta có $\overline{y}^* \in C_e^+$. Do đó, $r < \inf_{q\in Q} < \overline{y}^*, q >$ hay $r < \overline{s}_Q^1$, điều này là không thể. □

Mệnh đề 2.4. *(xem [22], Mệnh đề 3.4) Nếu C là tập đóng, thì*

$$s_Q^2 = \sup_{y^*\in C_e^+} \sup_{q\in Q} < y^*, q > .$$

Chứng minh. Lấy $q \in Q$ bất kỳ, do C là tập lồi, đóng nên theo Mệnh đề 2.3 ta có:

$$s_q^1 = s_q^2 = \sup_{y^*\in C_e^+} < y^*, q > .$$

Hơn nữa, bởi Mệnh đề 2.2(ii), $q \in \lambda e - C$ nếu và chỉ nếu $s_q^1 \leq \lambda$. Từ định nghĩa của s_Q^2 ta có,

$$\begin{aligned}
s_Q^2 &= \inf\{\lambda \in R : \forall\, q \in Q,\ q \in \lambda e - C\} \\
&= \inf\{\lambda \in R : \forall\, q \in Q,\ s_q^1 \leq \lambda\} \\
&= \inf\{\lambda \in R : \sup_{q\in Q} \sup_{y^*\in C_e^+} < y^*, q > \leq \lambda\} \\
&= \inf\{\lambda \in R : \sup_{y^*\in C_e^+} \sup_{q\in Q} < y^*, q > \leq \lambda\} \\
&= \sup_{y^*\in C_e^+} \sup_{q\in Q} < y^*, q > .
\end{aligned}$$

□

Mệnh đề 2.5. *(xem [22], Mệnh đề 3.5) Ta có,*

$$s_Q^1 = \inf_{y \in Q} s_q^1.$$

Chứng minh. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt $r := s_Q^1 + \varepsilon$. Áp dụng Mệnh đề 2.2(i), ta có $Q \cap (re - intC) \neq \emptyset$. Do vậy, tồn tại $\overline{q} \in Q$ sao cho $\overline{q} \in (re - intC)$. Khi đó, $\inf_{q \in Q} s_q^1 \leq s_{\overline{q}}^1 \leq r = s_Q^1 + \varepsilon$ (xem Mệnh đề 2.2(iii)). Do $\varepsilon > 0$ được chọn tùy ý, nên ta có $\inf_{q \in Q} s_q^1 \leq s_Q^1$. Nếu bất đẳng thức này không xảy ra dấu bằng, thì tồn tại $r' > 0$ và $q \in Q$ sao cho $s_q^1 + r' \leq s_Q^1$. Áp dụng Mệnh đề 2.2(i) với $r := s_q^1 + r'$, ta được $Q \cap [re - intC] = \emptyset$. Và do đó, $q \notin re - intC$. Tiếp tục áp dụng Mệnh đề 2.2(i) bằng cách thay q bởi Q ta thấy rằng $r \leq s_q^1$. Hay $r' \leq 0$, nhưng điều này là không thể. □

Kết luận Chương 2

Nội dung chính của Chương 2 là:

1. Trình bày định nghĩa về hàm vô hướng hóa phi tuyến.

2. Đưa ra một số tính chất quan trọng của hàm vô hướng hoá phi tuyến được sử dụng trong các chứng minh của Chương 3.

Chương 3

SỰ LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM KHÔNG YẾU CỦA BẤT ĐẲNG THỨC VÉC TƠ KY FAN SUY RỘNG

Chương 3 trình bày các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng không yếu phụ thuộc tham số và đưa ra các điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm của bài toán nói trên là liên tục.

3.1 Các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng không yếu

Giả sử T và K là không gian tôpô Hausdorff; $A_i : T \times K \rightrightarrows K$, $i = 0, 1$, là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, Y là không gian véc tơ tôpô lồi địa phương, $C : T \times K \times K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho mỗi giá trị của C là nón lồi, chính thường và đóng với phần trong khác rỗng, $F : T \times K \times K \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng.

Định nghĩa 3.1. Với mỗi $t \in T$, ta xét các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng không yếu với các nón thay đổi như sau:

Bài toán ($\mathbf{P_t^1}$): Tìm $x \in K$ sao cho $x \in A_0(t,x)$ và với mọi $\eta \in A_1(t,x)$,

$$F(t,x,\eta) \cap (-C(t,x,\eta)) \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Bài toán ($\mathbf{P_t^2}$) : Tìm $x \in K$ sao cho $x \in A_0(t,x)$ và với mọi $\eta \in A_1(t,x)$,

$$F(t,x,\eta) \subset -C(t,x,\eta). \tag{3.2}$$

Nhận xét 3.1. (i) Nghiệm của mỗi Bài toán $(P_t^j), j = 1,2$ được gọi là nghiệm không yếu. Nếu F là đơn trị, thì Bài toán (P_t^1) và (P_t^2) trùng nhau.

(ii) Các bài toán của chúng ta khác với các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan yếu được dùng trong [7, 8, 12] ở chỗ các điều kiện (3.1) và (3.2) được thay thế trong [7, 8, 12] bởi:

$$F(t,x,\eta) \cap -int\widehat{C} = \emptyset,$$

hoặc

$$F(t,x,\eta) \not\subset -int\widehat{C},$$

ở đó $\widehat{C} \subset Y$ là nón lồi, chính thường và đóng với $int\widehat{C} \neq \emptyset$. Hơn nữa, trong [7, 8, 12] thì $A_0 = A_1$, và A_0, A_1 độc lập với x. Trong [7, 8, 12] các nghiệm được gọi là nghiệm yếu.

3.2 Sự liên tục của ánh xạ nghiệm không yếu của bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng

Cở sở của việc chứng minh các kết quả chính của chúng ta là bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. *Giả sử T và K là không gian tôpô Hausdorff, $\widehat{\psi} : T \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị với giá trị khác rỗng, $f : T \times K \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục, $S : T \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị được định nghĩa bởi*

$$S(t) := \{x \in \widehat{\psi}(t) : f(t,x) \leq 0\},\ \forall\, t \in T.$$

Giả sử $t_0 \in domS$ và

(i) *$\widehat{\psi}$ là liên tục và có giá trị compact tại t_0;*

(ii) *Tồn tại một hàm nửa liên tục trên $g : T \times K \times K \to \mathbb{R}$ sao cho mỗi điểm $x_0 \in S(t_0)$ với $f(t_0,x_0) = 0$ các điều kiện sau thỏa mãn:*

(ii)$_1$ $\quad g(t_0, x_0^{'}, x_0) < 0$ *với mỗi* $x_0^{'} \in S(t_0) \setminus \{x_0\}$;

(ii)$_2$ $\quad$ *Với mỗi điểm* (t, x) *gần* (t_0, x_0) *với* $x \in \widehat{\psi}(t) \setminus S(t)$, *tồn tại* $x^{'} \in S(t)$ *sao cho*

$$f(t, x) + g(t, x^{'}, x) \geq 0. \tag{3.3}$$

Khi đó, S là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 1.1 ta có S là nửa liên tục trên tại t_0. Để chứng minh S là nửa liên tục dưới tại t_0, ta cần chứng minh S là nửa liên tục dưới tại $(t_0, x_0) \in grS$, với $x_0 \in S(t_0)$ bất kỳ. Giả sử phản chứng S không là nửa liên tục dưới tại (t_0, x_0). Khi đó, theo Mệnh đề 1.2 ta có thể kết luận rằng tồn tại dãy suy rộng $t_\alpha \longrightarrow t_0$, với mọi dãy con suy rộng t_β của t_α, với mọi $x_\beta \in S(t_\beta)$ thì $x_\beta \not\longrightarrow x_0$. Mặt khác, do $\widehat{\psi}$ là nửa liên tục dưới tại t_0, và $x_0 \in \widehat{\psi}(t_0)$ nên theo Mệnh đề 1.2, với mọi dãy suy rộng $t_\alpha \longrightarrow t_0$, tồn tại dãy con suy rộng t_β của t_α, và dãy suy rộng $x_\beta \longrightarrow x_0$ sao cho $x_\beta \in \widehat{\psi}(t_\beta)$ với mọi β. Do $x_0 \in S(t_0)$ nên $f(t_0, x_0) \leq 0$. Ta xét hai trường hợp:

(a) $\quad f(t_0, x_0) < 0$;

(b) $\quad f(t_0, x_0) = 0$.

Trong trường hợp (a), vì f liên tục tại (t_0, x_0) nên $f(t, x) < 0$ với mọi (t, x) đủ gần (t_0, x_0). Khi đó với "β đủ lớn", $x_\beta \in S(t_\beta)$. Điều này mâu thuẫn với kết luận nêu trên.

Trong trường hợp (b), như trên ta có $x_\beta \notin S(t_\beta)$ với β đủ lớn. Từ $(ii)_2$ với "β đủ lớn", tồn tại $x_\beta^{'} \in S(t_\beta)$ sao cho

$$f^{'}(t_\beta, x_\beta^{'}, x_\beta) := f(t_\beta, x_\beta) + g(t_\beta, x_\beta^{'}, x_\beta) \geq 0. \tag{3.4}$$

Ta thấy rằng $S(t_0)$ là tập compact, vì nó là giao của tập compact $\widehat{\psi}(t_0)$ và tập đóng $\{x \in K : f(t_0, x) \leq 0\}$. Lại do S là nửa liên tục trên tại t_0, bằng cách chuyển qua dãy suy rộng con nếu cần, ta có thể giả sử $x_\beta^{'} \to x_0^{'} \in S(t_0)$. Để hoàn thành chứng minh, ta chỉ ra rằng $x_0 = x_0^{'}$. Thực vậy, nếu $x_0^{'} \neq x_0$ thì do tính liên tục trên của $f^{'}$ và điều kiện

$$f^{'}(t_0, x_0^{'}, x_0) = f(t_0, x_0) + g(t_0, x_0^{'}, x_0) = 0 + g(t_0, x_0^{'}, x_0) < 0$$

ta có $f^{'}(t, x^{'}, x) < 0$ với mọi $(t, x^{'}, x)$ đủ gần $(t_0, x_0^{'}, x_0)$. Do đó với "β đủ lớn", $f^{'}(t_\beta, x_\beta^{'}, x_\beta) < 0$. Điều này mâu thuẫn với (3.4). $\square$

Nhận xét 3.2. *Cho K là một tập con của không gian định chuẩn và $\| x \|$ là ký hiệu chuẩn của x. Nếu đặt*

$$g(t, x', x) := -\| x' - x \| \tag{3.5}$$

với mọi $(t, x', x) \in T \times K \times K$, thì g là hàm liên tục thỏa mãn $(ii)_1$ của Bổ đề 3.1. Nhưng ta sẽ thấy trong Ví dụ 3.1 sau đây, hàm này không thỏa mãn điều kiện $(ii)_2$ của Bổ đề 3.1. Trong khi đó, ta có thể tìm được một hàm g thích hợp thỏa mãn đồng thời điều kiện $(ii)_1$ và $(ii)_2$ của Bổ đề 3.1 tại $t_0 \in T$ và $x_0 \in S(t_0)$.

Ví dụ 3.1. *Cho $T = [-4/5, -2/3] \subset \mathbb{R}$, $K = [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$, và mỗi $(t, x, \eta) \in T \times K \times K$, cho $\widehat{\psi}(t) = [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$, $s(t, x, \eta) = (2|\eta| + 1)(t + 1/2)x$. Với mỗi $(t, x) \in T \times K$, ta định nghĩa:*

$$f(t,x) = \sup_{\eta \in \widehat{\psi}(t)} s(t,x,\eta) = \begin{cases} (t+1/2)x & \text{nếu } x \in [0, 1/2], \\ 2(t+1/2)x & \text{nếu } x \in [-1/2, 0[. \end{cases}$$

Với mỗi $t \in T = [-4/5, -2/3]$, ta có

$$\begin{aligned} S(t) &= \{x \in \widehat{\psi}(t) : f(t,x) \le 0\} \\ &= \{x \in [0, 1/2] : (t + 1/2)x \le 0\} \\ &= [0, 1/2]. \end{aligned}$$

Đặt

$$g(t, x', x) = 1/2(x + 2x')(2t + 1), (t, x', x) \in T \times K \times K.$$

Cho $t_0 \in domS = [-4/5, -2/3]$ và $x_0 \in S(t_0) = [0, 1/2]$. Khi đó, $f(t_0, x_0) = 0$ nếu và chỉ nếu $x_0 = 0$. Ta thấy điều kiện $(ii)_1$ của Bổ đề 3.1 được thỏa mãn. Thực vậy, với mỗi $x_0' \in S(t_0) \setminus \{x_0\} =]0, 1/2]$ ta có

$$g(t_0, x_0', x_0) = x_0'(2t_0 + 1) < 0.$$

Bây giờ ta xem xét điều kiện $(ii)_2$ của Bổ đề này. Với mỗi $(t, x) \in T \times K$ và $x \in \widehat{\psi}(t) \setminus S(t) = [-1/2, 0[$, lấy $x' = 0 \in S(t) = [0, 1/2]$, ta có $f(t, x) = 2(t + 1/2)x$, $g(t, x', x) = 1/2x(2t + 1)$. Do đó,

$$f(t,x) + g(t, x', x) = 3x(t + 1/2) > 0,$$

và điều kiện $(ii)_2$ của Bổ đề được thỏa mãn.

Tiếp theo, ta chỉ ra rằng điều kiện $(ii)_2$ *của Bổ đề* 3.1 *là không thỏa mãn với* g *được xác định bởi* (3.5)*. Thực vậy, giả sử ngược lại rằng với* $(t,x) \in T \times K$ *và* $x \in \widehat{\psi}(t) \backslash S(t) = [-1/2, 0[$*, ta có thể tìm được* $x^{'} \in S(t) = [0, 1/2]$ *sao cho*

$$f(t,x) - \parallel x^{'} - x \parallel \geq 0. \tag{3.6}$$

Do $x \in [-1/2, 0[$*, ta có* $f(t,x) = 2(t+1/2)x$*. Mặt khác,* $|x^{'} - x| \geq |-x| = -x$*. Vì vậy* (3.6) *kéo theo bất đẳng thức* $2x(t+1) \geq 0$*. Điều này là không thể vì* $x \in [-1/2, 0[$ *và* $t \in [-4/5, -2/3]$*.*

Hệ quả sau chỉ ra rằng trong một số trường hợp đặc biệt hàm f có thể đóng vai trò hàm g trong Bổ đề 3.1.

Hệ quả 3.1. *Giả sử các điều kiện của Bổ đề* 3.1 *là thỏa mãn, ngoại trừ điều kiện (ii). Giả sử thêm rằng*

(ii) *Mỗi điểm* $x_0 \in S(t_0)$ *với* $f(t_0, x_0) = 0$*, các điều kiện sau thỏa mãn:*

- $(\mathrm{ii})_1$ $f(t_0, x_0^{'}) < 0$ *với mọi* $x_0^{'} \in S(t_0) \setminus \{x_0\}$*;*
- $(\mathrm{ii})_2$ *Mỗi điểm* (t,x) *gần* (t_0, x_0) *với* $x \in \widehat{\psi}(t) \setminus S(t)$*, tồn tại* $x^{'} \in S(t)$ *sao cho* $f(t,x) + f(t,x^{'}) \geq 0$*.*

Khi đó S *là liên tục tại* t_0*.*

Đây là kết quả trực tiếp của Bổ đề 3.1, với $g(t,x^{'},x) \equiv f(t,x^{'})$ với mọi $(t,x^{'},x) \in T \times K \times K$.

Ví dụ 3.2. *Trong Ví dụ* 3.1*, với mỗi* $(t,x) \in T \times K$ *với* $x \in \widehat{\psi}(t) \setminus S(t) = [-1/2, 0[$*, ta lấy* $x^{'} = 0 \in S(t)$*, ta có*

$$f(t,x) + f(t,x^{'}) = 2(t+1/2)x > 0.$$

Vậy điều kiện $(ii)_2$ *của Hệ quả* 3.1 *được thỏa mãn. Điều kiện* $(ii)_1$ *của Hệ quả này cũng đúng. Thực vậy, mỗi* $t_0 \in T = [-4/5, -2/3]$*, ta thấy rằng* $\{x_0 \in S(t_0) : f(t_0, x_0) = 0\} = \{0\}$*. Do đó, cho* $x_0 = 0$ *và* $x_0^{'} \in S(t_0) \setminus \{x_0\} =]0, 1/2]$ *ta có*

$$f(t_0, x_0^{'}) = (t_0 + 1/2)x_0^{'} < 0$$

như yêu cầu.

Cho $j = 1, 2$, ký hiệu $S^j(t)$ là tập nghiệm của bài toán (P_t^j). Ta quan tâm tới tính liên tục của S^j tại điểm $t_0 \in T$ với $S^j(t_0) \neq \emptyset$. Ta luôn giả sử rằng, ánh xạ đa trị F có giá trị compact, khác rỗng, C là ánh xạ đa trị sao cho mỗi giá trị của C là nón lồi, chính thường và đóng với phần trong khác rỗng. Cho $e : T \times K \times K \longrightarrow Y$ là ánh xạ đơn trị sao cho $e(\cdot) \in intC(\cdot)$, tức là $e(t, x, \eta) \in intC(t, x, \eta)$, với mọi $(t, x, \eta) \in T \times K \times K$.

Xét hàm vô hướng hóa phi tuyến

$$s^j : T \times K \times K \longrightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2,$$

được định nghĩa như sau:

$$s^1(\cdot) := \min\{\lambda \in \mathbb{R} : F(\cdot) \cap (\lambda e(\cdot) - C(\cdot)) \neq \emptyset\}, \tag{3.7}$$

$$s^2(\cdot) := \min\{\lambda \in \mathbb{R} : F(\cdot) \subset \lambda e(\cdot) - C(\cdot)\}. \tag{3.8}$$

Khi đó, theo Bổ đề 2.1 thì s^j với $j = 1, 2$, là xác định.

Với mỗi $(t, x) \in T \times K$, ta đặt

$$f^j(t, x) := \sup_{\eta \in A_1(t,x)} s^j(t, x, \eta), j = 1, 2.$$

Ký hiệu $\psi(t)$ là tập các điểm bất động của $A_0(t, \cdot)$:

$$\psi(t) := \{x \in K : x \in A_0(t, x)\}.$$

Trong phần tiếp theo ta luôn giả sử rằng $t_0 \in domS^j$, ψ là liên tục và có giá trị compact tại t_0.

Định lý sau đây là kết quả trực tiếp của Bổ đề 3.1 và Mệnh đề 2.2, về tính liên tục của S^j, $j = 1, 2$.

Định lý 3.1. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *f^j là liên tục;*

(ii) *Tồn tại hàm $g : T \times K \times K \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục trên sao cho tại mỗi điểm $x_0 \in S^j(t_0)$ với $f^j(t_0, x_0) = 0$, những điều kiện sau thỏa mãn:*

(ii)$_1$ *$g(t_0, x_0', x_0) < 0$ với mỗi $x_0' \in S^j(t_0) \setminus \{x_0\}$;*

(ii)$_2$ *Mỗi điểm (t, x) gần (t_0, x_0) với $x \in \psi(t) \setminus S^j(t)$, tồn tại $x' \in S^j(t)$ sao cho*

$$f^j(t, x) + g(t, x', x) \geq 0. \tag{3.9}$$

Khi đó, S^j là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.2 điều kiện (3.1) [t.ư (3.2)] tương đương với điều kiện $s^1(t,x,\eta) \le 0$ [t.ư $s^2(t,x,\eta) \le 0$]. Khi đó điều kiện (3.1) [t.ư (3.2)] đúng với mọi $\eta \in A_1(t,x)$ nếu và chỉ nếu $f^1(t,x) \le 0$ [t.ư $f^2(t,x) \le 0$]. Do đó $S^j(t) = \{x \in \psi(t) : f^j(t,x) \le 0\}$ với $j \in \{1,2\}$. Áp dụng Bổ đề 3.1 với $\widehat{\psi}, f$ được thay bởi ψ và f^j ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.3. Điều kiện (ii) của Định lý 3.1 chỉ đòi hỏi được thỏa mãn tại $x_0 \in S(t_0)$ với $f(t_0,x_0) = 0$. Suy ra rằng tính liên tục của S^j luôn luôn được bảo đảm nếu $f^j(t_0,x_0) < 0$ với mỗi $x_0 \in S^j(t_0)$.

Điều kiện (ii) là khác hoàn toàn với các giả thiết đã được dùng trong các bài báo gần đây (ví dụ như Điều kiện (H_2) trong Định lý 4.2 của [21] hoặc Điều kiện (4) trong Hệ quả 5.3 của [16]).

Nhận xét 3.4. Điều kiện $(ii)_2$ của Định lý 3.1 được thỏa mãn nếu với mỗi điểm (t,x) gần (t_0,x_0) và $x \in \psi(t) \setminus S^j(t)$, tồn tại $x^{'} \in S^j(t)$ và $\eta \in A_1(t,x)$ sao cho

$$s^j(t,x,\eta) + g(t,x^{'},x) \ge 0.$$

Từ điều này ta thấy điều kiện (ii) của Định lý 3.1 được thỏa mãn nếu K là tập con của một không gian định chuẩn, nếu g được định nghĩa bởi (3.5) và nếu với mỗi điểm (t,x) gần (t_0,x_0) mà $x \in \psi(t) \setminus S^j(t)$, tồn tại $x^{'} \in S^j(t)$, $\eta^{'} \in A_1(t,x)$ và $\eta \in A_1(t,x^{'})$ sao cho

$$s^j(t,x,\eta^{'}) + s^j(t,x^{'},\eta) - \|x^{'} - x\| \ge 0. \tag{3.10}$$

Nếu $A_0(t,x) \equiv A_1(t,x) \equiv A(t)$ với mọi $(t,x) \in T \times K$, ở đó $A : T \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị, thì $\psi(t) = A(t) = \{x \in K : x \in A_0(t,x)\}$. Trong trường hợp này, đặt $\eta^{'} = x^{'}, \eta = x$. Nói cách khác, đối với trường hợp đặc biệt này yêu cầu trên là $\exists\, x^{'} \in S^j(t), \eta^{'} \in A_1(t,x)$ và $\eta \in A_1(t,x^{'})$ thỏa mãn (3.10) được thay thế bởi yêu cầu tồn tại $x^{'} \in S^j(t)$ sao cho

$$s^j(t,x,x^{'}) + s^j(t,x^{'},x) - \| x^{'} - x \| \ge 0.$$

Trong Định lý 3.1, ta giả sử tồn tại một hàm g thỏa mãn điều kiện (ii). Tuy nhiên ta có thể dùng Hệ quả 3.1 để chỉ ra rằng f^j có thể chọn làm hàm g trong Định lý 3.1, và do đó tính liên tục của S^j tại t_0 có thể có được bằng cách đặt các điều kiện thích hợp cho các dữ kiện của bài toán (P_t^j), $j = 1, 2$. Cụ thể, chúng ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.2. *Giả các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) f^j *là liên tục;*

(ii) *Tại mỗi điểm* $x_0 \in S^j(t_0)$ *thỏa mãn* $f^j(t_0, x_0) = 0$, *ta có*

(ii)$_1$ $f^j(t_0, x_0^{'}) < 0$ *với mỗi* $x_0^{'} \in S^j(t_0) \setminus \{x_0\}$;

(ii)$_2$ *Mỗi điểm* (t, x) *gần* (t_0, x_0) *với* $x \in \psi(t) \setminus S^j(t)$, *tồn tại* $x^{'} \in S^j(t)$ *sao cho* $f^j(t, x) + f^j(t, x^{'}) \geq 0$.

Khi đó, S^j *là liên tục tại* t_0.

Trong phần cuối, ta sẽ tìm các điều kiện dễ kiểm tra giả thiết (ii) của Định lý 3.1 và Hệ quả 3.2 cho một số lớp bài toán đặc biệt và quan trọng của (P_t^j), $j = 1, 2$, với nón C cố định (xem Hệ quả 3.7, 3.8, 3.10, và 3.11).

Điều kiện (i) của Định lý 3.1 có thể được thỏa mãn mà không cần tới tính liên tục của các dữ kiện của bài toán (P_t^j). Tuy nhiên, đôi khi nó không dễ dàng để kiểm tra. Trong Hệ quả 3.4 dưới đây, chúng ta sẽ nhận được các điều kiện dễ kiểm tra giả thiết (i) của Định lý 3.1. Điều này thu được, bằng cách đặt các tính chất liên tục phù hợp trên A_1, F, C và e. Kết quả này có đươc trên cơ sở hệ quả sau.

Hệ quả 3.3. *Cùng với điều kiện* (ii) *của Định lý* 3.1, *giả sử rằng*

(i) A_1 *là ánh xạ liên tục với giá trị compact;*

(ii) s^j *là liên tục.*

Khi đó, S^j *là liên tục tại* t_0.

Chứng minh. Từ điều kiện (i) và (ii), áp dụng Định lý 1.5 ta được tính liên tục của f^j. Từ đó, theo Định lý 3.1 ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.4. *Cùng với điều kiện* (ii) *của Định lý* 3.1, *giả sử rằng*

(i) A_1 *là ánh xạ liên tục với giá trị compact;*

(ii) F *là* C*- liên tục (tương ứng* F *là* $(-C)$*- liên tục);*

(iii) C *có đồ thị đóng,* $intC$ *có đồ thị mở, và* e *là liên tục.*

Khi đó, S^1*(tương ứng* S^2*) là liên tục tại* t_0.

Chứng minh. Áp dụng Hệ quả 1.1 và Hệ quả 1.2 với điều kiện $(ii), (iii)$ ta có tính liên tục của s^1 (tương ứng s^2). Từ đó, theo Hệ quả 3.3 ta có điều phải chứng minh. □

Cho C là ánh xạ hằng, tức là

$$C(t, x, \eta) \equiv \widehat{C}, \tag{3.11}$$

trong đó $\widehat{C} \subset Y$ là nón lồi, chính thường và đóng với $int\widehat{C} \neq \emptyset$. Trong trường hợp này, $e(t, x, \eta) \equiv \widehat{e}$, với $\widehat{e} \in int\widehat{C}$.

Hệ quả 3.5. *Cùng với điều kiện (ii) của Định lý 3.1, giả sử rằng C là ánh xạ hằng được định nghĩa bởi (3.11), trong đó $\widehat{C} \subset Y$ là nón lồi, chính thường, và đóng với $int\widehat{C} \neq \emptyset$. Giả sử thêm rằng*

(i) *A_1 là ánh xạ liên tục với giá trị compact;*

(ii) *F là $\widehat{C}$-liên tục (tương ứng F là $(-\widehat{C})$- liên tục).*

Khi đó, S^1 (tương ứng S^2) là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Điều kiện (iii) của Hệ quả 3.3 luôn thỏa mãn, vì C và e là ánh xạ hằng. Do đó, đây là kết quả trực tiếp của Hệ quả 3.3. □

Chúng ta kết thúc mục này bằng việc xét một số trường hợp đặc biệt quan trọng của bài toán $(P_t^j), j = 1, 2$. Cụ thể, trong những bài toán này, ta luôn giả sử rằng C là ánh xạ hằng được định nghĩa bởi (3.11), trong đó $\widehat{C} \subset Y$ là nón lồi, chính thường, đóng, $int\widehat{C} \neq \emptyset$. Ta cũng chọn $\widehat{e}$ là một điểm cố định của $int\widehat{C}$. Giả sử thêm rằng, $A_0(t, x) = A_1(t, x) \equiv A(t)$ với mỗi $(t, x) \in T \times K$, trong đó $A : T \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị liên tục, có giá trị compact khác rỗng (trong trường hợp này $\psi = A$, và do đó ψ là liên tục và có giá trị compact). Tất cả các giả thiết trên đều được giả sử thỏa mãn trong các Hệ quả 3.6 − 3.11.

Hệ quả 3.6. *Ta xét một trường hợp đặc biệt của bài toán (P_t^1) như sau: Tìm một điểm $x \in A(t)$ sao cho, $F(t, x, \eta) \cap -\widehat{C} \neq \emptyset$ với mỗi $\eta \in A(t)$. Ký hiệu $S^1(t)$ là tập nghiệm của bài toán, và $t_0 \in domS^1$. Giả sử rằng*

(i) *F là $\widehat{C}$- liên tục và có giá trị compact;*

(ii) *Tồn tại một hàm nửa liên tục trên $\widehat{g} : T \times K \times K \to \mathbb{R}$ sao cho với mỗi điểm $x_0 \in S^1(t_0)$ mà $f^1(t_0, x_0) = 0$ các điều kiện sau thỏa mãn:*

(ii)$_1$ $\quad \widehat{g}(t_0, x_0^{'}, x_0) < 0$ *với mỗi* $x_0^{'} \in S^1(t_0) \setminus \{x_0\}$.

(ii)$_2$ $\quad$ *Mỗi điểm* (t, x) *gần* (t_0, x_0) *với* $x \in \psi(t) \setminus S^1(t)$, *tồn tại* $x^{'} \in S^1(t)$ *sao cho*

$$[F(t, x, x^{'}) + F(t, x^{'}, x) + \widehat{g}(t, x^{'}, x)\widehat{e}\,] \cap -int\widehat{C} = \emptyset. \tag{3.12}$$

Khi đó, S^1 *là liên tục tại* t_0.

Chứng minh. Do Hệ quả 3.5 ta chỉ cần chứng minh điều kiện (ii) của Định lý 3.1, là thỏa mãn với $f^1(t, x) = \sup_{\eta \in A(t)} s^1(t, x, \eta)$. Lấy $g(t, x^{'}, x) = f^1(t, x^{'}) + \widehat{g}(t, x^{'}, x)$, $(t, x^{'}, x) \in T \times K \times K$. Nếu $x_0^{'} \in S^1(t_0)$ thì theo Mệnh đề 2.2 ta có $s^1(t_0, x_0^{'}, \eta) \leq 0$ với mỗi $\eta \in A(t_0)$, và do đó $f^1(t_0, x_0^{'}) \leq 0$. Khi ấy, cùng với điều kiện $(ii)_1$ của Hệ quả 3.6, ta có $g(t_0, x_0^{'}, x_0) < 0$ với $x_0^{'} \in S^1(t_0) \setminus \{x_0\}$, tức là Điều kiện $(ii)_1$ của Định lý 3.1 được thỏa mãn .

Cho $t, x^{'}, x$ như trong điều kiện $(ii)_2$ của Hệ quả 3.6. Với mỗi điểm $q \in F(t, x^{'}, x)$, $q^{'} \in F(t, x^{'}, x)$, ta có $\overline{q} := q + q^{'} + \widehat{g}(t, x^{'}, x)\widehat{e} \notin -int\widehat{C}$ (xem (3.12)). Khi đó, theo Mệnh đề 2.2(i) $s^1_{\overline{q}} \leq 0$. Mặt khác, ta có $s^1_{\overline{q}} \leq s^1_q + s^1_{q^{'}} + s^1_{\gamma\widehat{e}}$, và $s^1_{\gamma\widehat{e}} = \gamma$, ở đó $\gamma := \widehat{g}(t, x^{'}, x)$. Do đó, $s^1_q + s^1_{q^{'}} + \widehat{g}(t, x^{'}, x) \geq 0$. Do bất đẳng thức này đúng với mọi $q \in F(t, x^{'}, x)$, $q^{'} \in F(t, x^{'}, x)$, ta có thể viết

$$\inf_{q \in F(t,x,x^{'})} s^1_q + \inf_{q^{'} \in F(t,x^{'},x)} s^1_{q^{'}} + \widehat{g}(t, x^{'}, x) \geq 0.$$

Từ Mệnh đề 2.5 ta có

$$s^1(t, x, x^{'}) + s^1(t, x^{'}, x) + \widehat{g}(t, x^{'}, x) \geq 0.$$

Mặt khác do $f^1(t, x) \geq s^1(t, x, x^{'})$ và $f^1(t, x^{'}) \geq s^1(t, x^{'}, x)$ nên $f^1(t, x) + f^1(t, x^{'}) + \widehat{g}(t, x^{'}, x) \geq 0$. Vậy điều kiện $(ii)_2$ của Định lý 3.1 là thỏa mãn, và Hệ quả 3.6 được chứng minh. □

Hệ quả 3.7. *Giả sử tất cả các giả thiết của Hệ quả 3.6 là thỏa mãn, ngoại trừ điều kiện* (ii). *Giả sử thêm rằng* K *là tập con của không gian định chuẩn, và mỗi điểm* $x_0 \in S^1(t_0)$ *với* $f^1(t_0, x_0) = 0$, *điều kiện* $(ii)^{'}$ *sau là đúng:*

(ii)$^{'}$ $\quad$ *Cho mỗi điểm* (t, x) *gần* (t_0, x_0) *với* $x \in \psi(t) \setminus S^1(t)$, *tồn tại* $x^{'} \in S^1(t)$ *sao cho*

$$[F(t, x, x^{'}) + F(t, x^{'}, x) - \parallel x^{'} - x \parallel \widehat{e}\,] \cap -int\widehat{C} \neq \emptyset. \tag{3.13}$$

Khi đó, S^1 là liên tục tại t_0.

Đây là trường hợp đặc biệt của Hệ quả 3.6 với g được xác định bởi (3.5).

Kết quả sau thu được từ Hệ quả 3.2 bằng cách làm mạnh thêm một số điều kiện.

Hệ quả 3.8. *Giả sử tất cả các giả thiết của Hệ quả 3.6 là thỏa mãn, ngoại trừ điều kiện (ii). Giả sử thêm rằng*

(ii)$'$ *Tại mỗi điểm $x_0 \in S^1(t_0)$, ta có:*

(ii)$'_1$ *$F(t_0, x_0', \eta) \cap -int\widehat{C} \neq \emptyset$ với mỗi $\eta \in A(t_0)$ và $x_0' \in S^1(t_0) \setminus \{x_0\}$;*

(ii)$'_2$ *Cho mỗi điểm (t, x) gần (t_0, x_0) với $x \in \psi(t) \setminus S^1(t)$, tồn tại $x' \in S^1(t)$ sao cho*

$$[F(t, x, x') + F(t, x', x)] \cap -int\widehat{C} = \emptyset. \tag{3.14}$$

Khi đó, S^1 là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 2.2(i), điều kiện $F(t_0, x_0', \eta) \cap -int\widehat{C} \neq \emptyset$ với mỗi $\eta \in A(t_0)$ tương đương với $f^1(t_0, x_0') < 0$. Do đó, điều kiện $(ii)'_1$ tương đương với điều kiện $(ii)_1$ của Hệ quả 3.2, với $j = 1$.

Cho (t, x) như trong điều kiện $(ii)'_2$, lập luận như trong Hệ quả 3.5 ta thấy rằng điều kiện (3.14) kéo theo điều kiện $s^1(t, x, x') + s^1(t, x', x) \geq 0$. Và do đó, điều kiện $(ii)_2$ của Hệ quả 3.2 thỏa mãn với $j = 1$. Áp dụng Hệ quả 3.2 ta có S^1 là liên tục tại t_0. □

Hệ quả 3.9. *Ta xét một trường hợp đặc biệt của bài toán (P_t^2) như sau: Tìm một điểm $x \in A(t)$ sao cho, $F(t, x, \eta) \subset -\widehat{C}$ với mỗi $\eta \in A(t)$. Ký hiệu $S^2(t)$ là tập nghiệm của bài toán, và cho $t_0 \in domS^2$. Giả sử rằng*

(i) *F là $-(\widehat{C})$ -liên tục và có giá trị compact;*

(ii) *Tồn tại một hàm $\widehat{g} : T \times K \times K \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục trên sao cho với mỗi điểm $x_0 \in S^2(t_0)$ với $f^2(t_0, x_0) = 0$ ta có*

(ii)$_1$ *$\widehat{g}(t_0, x_0', x_0) < 0$ với mỗi $x_0' \in S^2(t_0) \setminus \{x_0\}$;*

(ii)$_2$ *Mỗi điểm (t, x) gần (t_0, x_0) với $x \in \psi(t) \setminus S^2(t)$, tồn tại $x' \in S^2(t)$ sao cho*

$$[F(t, x, x') + F(t, x', x) + \widehat{g}(t, x', x)\widehat{e}\,] \not\subset -int\widehat{C}. \tag{3.15}$$

Khi đó, S^2 *là liên tục tại* t_0.

Chứng minh. Do Hệ quả 3.5 ta chỉ cần chứng minh điều kiện (ii) của Định lý 3.1 được thỏa mãn với $f^2(t,x) = sup_{\eta \in A(t)} s^2(t,x,\eta)$, $(t,x) \in T \times K$. Lấy $g(t,x^{'},x) = f^2(t,x^{'}) + \widehat{g}(t,x^{'},x)$, $(t,x^{'},x) \in T \times K \times K$. Nếu $x_0^{'} \in S^2(t)$ thì theo Mệnh đề 3.2(iv) ta có $s^2(t_0,x_0,\eta) \leq 0$ với mỗi $\eta \in A(t_0)$, do đó $f^2(t_0,x_0^{'}) \leq 0$. Cùng với điều kiện $(ii)_1$ của Hệ quả 3.9, ta có $g(t_0,x_0^{'},x_0) < 0$ với $x_0^{'} \in S^1(t_0) \setminus \{x_0\}$, tức là điều kiện $(ii)_1$ của Định lý 3.1 được thỏa mãn.

Cho $t,x^{'},x$ như trong điều kiện $(ii)_2$ của Hệ quả 3.9, và cho $q \in F(t,x^{'},x)$, $q^{'} \in F(t,x^{'},x)$, ta có $\overline{q} := q + q^{'} + \widehat{g}(t,x^{'},x)\widehat{e} \notin -int\widehat{C}$ (xem (3.15)). Lập luận như trong Hệ quả 3.6 ta có $s_q^1 + s_{q^{'}}^1 + \widehat{g}(t,x^{'},x) \geq 0$.

Do $s^2(t,x,x^{'}) := s^2_{F(t,x,x^{'})} \geq s_q^2 = s_q^1$ và $s^2(t,x^{'},x) := s^2_{F(t,x^{'},x)} \geq s^2_{q^{'}} = s^1_{q^{'}}$, nên ta có

$$s^2(t,x,x^{'}) + s^2(t,x^{'},x) + \widehat{g}(t,x^{'},x) \geq 0.$$

Vậy (3.9) thỏa mãn với $j = 2$. Ta thấy điều kiện $(ii)_2$ của Định lý 3.1 là thỏa mãn. Áp dụng Định lý 3.1 ta có kết luận của Hệ quả 3.9. □

Hệ quả 3.10. *Giả sử tất cả giả thiết của Hệ quả* 3.9 *thỏa mãn, ngoại trừ điều kiện* (ii). *Giả thêm rằng* K *là tập con của không gian định chuẩn và với mỗi* $x_0 \in S^2(t_0)$ *mà* $f^2(t_0,x_0) = 0$ *điều kiện* $(ii)^{'}$ *sau đây được thỏa mãn:*

(ii)$^{'}$ *Với mỗi điểm* (t,x) *gần* (t_0,x_0) *với* $x \in \psi(t) \setminus S^2(t)$, *tồn tại* $x^{'} \in S^2(t)$ *sao cho*

$$F(t,x,x^{'}) + F(t,x^{'},x) - \parallel x^{'} - x \parallel \widehat{e} \not\subset -int\widehat{C}.$$

Khi đó, S^2 *là liên tục tại* t_0.

Đây là trường hợp đặc biệt của Hệ quả 3.9, với g được định nghĩa bởi (3.5).

Hệ quả 3.11. *Giả sử tất cả giả thiết của Hệ quả* 3.9 *là thỏa mãn, ngoại trừ điều kiện* (ii). *Giả sử thêm rằng*

(ii)$^{'}$ *Với mỗi điểm* $x_0 \in S^2(t_0)$, *ta có*

(ii)$^{'}_1$ $(t_0,x_0^{'},\eta) \subset -int\widehat{C}$ *với mỗi* $\eta \in A(t_0)$ *và* $x_0^{'} \in S^2(t_0) \setminus \{x_0\}$;

(ii)$^{'}_2$ *Với mỗi* (t,x) *gần* (t_0,x_0) *và* $x \in \psi(t) \setminus S^2(t)$, *tồn tại* $x^{'} \in S^2(t)$ *sao cho* $F(t,x,x^{'}) + F(t,x^{'},x) \not\subset -int\widehat{C}$.

Khi đó, S^2 là liên tục tại t_0.

Chứng minh này tương tự như Hệ quả 3.8, với việc áp dụng Mệnh đề 3.2(iii).

3.3 Một số kết quả khác về tính liên tục

Ta nhắc lại rằng, Y là không gian tôpô lồi địa phương và Y^* là đối ngẫu tôpô của Y, Y^* được trang bị với tôpô yếu* (tức là, tôpô có một cơ sở lận cận của gốc gồm tất cả tập có dạng $\{f \in Y^* : |f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, ...n\}$ với $\varepsilon > 0$, x_i là những phần tử bất kỳ của Y) . Như trong phần trước, ta luôn giả sử rằng F có giá trị compact, khác rỗng, C là ánh xạ đa trị sao cho mỗi giá trị của C là nón lồi, chính thường và đóng với phần trong khác rỗng, $e : T \times K \times K \longrightarrow Y$ là ánh xạ đơn trị sao cho $e(\cdot) \in intC(\cdot)$. Ánh xạ ψ là liên tục và có giá trị compact tại một điểm cố định $t_0 \in domS^j$.

Ký hiệu C^+ là ánh xạ đa trị từ $T \times K \times K$ vào Y^*, có các giá trị được xây dựng từ nón đối ngẫu, không âm của các giá trị của C:

$$C^+(\cdot) = \{y^* \in Y^* : < y^*, y > \geq 0, \forall y \in C(\cdot)\}.$$

Ánh xạ đa trị $\mathcal{C}^+$ từ $T \times K \times K \longrightarrow Y^*$ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{C}^+(\cdot) := \{y^* \in C^+(\cdot) : < y^*, e(\cdot) > = \ 1\}.$$

Do Y^* được trang bị với tôpô yếu*, theo [14] ánh xạ $\mathcal{C}^+(\cdot)$ có giá trị compact trong tôpô yếu* của Y^*.

Trong phần này, ta sẽ chỉ ra rằng ánh xạ $\mathcal{C}^+$ là một công cụ hữu ích trong nghiên cứu tính liên tục của ánh xạ S^j, $j = 1, 2$. Trước hết, chúng ta đưa vào hàm $\overline{s}^j$: $T \times K \times K \longrightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2$ được định nghĩa thông qua ánh xạ $\mathcal{C}^+$:

$$\overline{s}^1 = \sup_{y^* \in \mathcal{C}^+(\cdot)} \inf_{y \in F(\cdot)} < y^*, y >,$$

$$\overline{s}^2 = \sup_{y^* \in \mathcal{C}^+(\cdot)} \sup_{y \in F(\cdot)} < y^*, y > .$$

Với mỗi $(t, x) \in T \times K$, ta đặt

$$\overline{f}^j(t, x) := \sup_{\eta \in A_1(t,x)} \overline{s}^j(t, x, \eta), j = 1, 2.$$

Ta thấy rằng định nghĩa của $\overline{f}^j(t, x)$ có được từ $f^j(t, x)$ bằng cách thay thế $s^j(t, x, \eta)$ bởi $\overline{s}^j(t, x, \eta)$. Từ Mệnh đề 2.3 và 2.4 ta có điều kiện đủ cho $s^j = \overline{s}^j$, do đó $f^j = \overline{f}^j$.

Và tính liên tục của S^j có thể được biểu hiện qua $\overline{f}^j$. Đẳng thức $s^j = \overline{s}^j$ chỉ ra rằng s^j có thể được xây dựng thông qua ánh xạ $\mathcal{C}^+$ mà không cần tới định nghĩa ban đầu như trong công thức (3.7), (3.8). Hơn nữa, việc dùng $\overline{s}^j$ có thể dẫn tới nhiều giả thiết mới (xem Hệ quả 3.12 − 3.14) và xem thêm trong Nhận xét 3.5.

Trong phần này, khi nghiên cứu bài toán (P_t^1), ta luôn giả sử rằng tập giá trị của ánh xạ $F + C$ có giá trị lồi, tức là $F(t, x, \eta) + C(t, x, \eta)$ là lồi với mỗi $(t, x, \eta) \in T \times K \times K$. Giả thiết này không nhất thiết phải giả sử thỏa mãn trong bài toán (P_t^2). Điều đáng chú ý là, giả thiết lồi ở đây là khác với các giả thiết lồi tương ứng được dùng trong [7, 8, 12]. Như một ví dụ minh họa cho sự khác biệt này, ta xét một trường hợp đặc biệt, ở đó F là đơn trị. Ta thấy rằng các giả thiết lồi của chúng ta là tự động thỏa mãn, trong khi giả thiết lồi của [7, 8, 12] chỉ đúng khi thêm một số đòi hỏi nữa.

Định lý 3.2. *Giả sử các điều kiện của Định lý* 3.1 *được thỏa mãn, với f^j được thay thế bởi $\overline{f}^j$. Khi đó S^j là liên tục tại t_0.*

Chứng minh. Như đã nói trong phần đầu, trong phần này ta chỉ xét bài toán (P_t^1), ở đó $F + C$ có giá trị lồi. Nếu $j = 1$ thì từ Mệnh đề 2.3 ta có $\overline{s}^1 = s^1$ và do đó $\overline{f}^1 = f^1$. Nếu $j = 2$ thì bởi Mệnh đề 2.4 ta có $\overline{s}^2 = s^2$ và do vậy $\overline{f}^2 = f^2$. Áp dụng Định lý 3.1 ta có điều phải chứng minh. □

Trước khi xây dựng Hệ quả 3.12, ta đưa vào hàm $m^j : Y^* \times T \times K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ được định nghĩa như sau:

$$m^1(y^*, t, x, \eta) := \inf_{y \in F(t,x,\eta)} < y^*, y >,$$

$$m^2(y^*, t, x, \eta) := \sup_{y \in F(t,x,\eta)} < y^*, y > .$$

Hệ quả 3.12. *Giả sử điều kiện (ii) của Định lý* 3.1 *thỏa mãn, với f^j được thay thế bởi $\overline{f}^j$. Giả sử thêm rằng*

(i) *A_1 là ánh xạ liên tục có giá trị compact;*

(ii) *m^j là ánh xạ liên tục;*

(iii) *$\mathcal{C}^+$ là liên tục.*

Khi đó, S^j là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Ta có:

$$\overline{s}^j(t,x,\eta) = \sup_{y^* \in \mathcal{C}^+(t,x,\eta)} m^j(y^*,t,x,\eta).$$

Mặt khác, $\mathcal{C}^+$ có giá trị compact và, do (iii) nó là liên tục. Nên cộng với điều kiện (ii), ta có kết luận từ Mệnh đề 2.1 rằng $\overline{s}^j$ là liên tục. Vì vậy $\overline{f}^j$ là liên tục, và do Định lý 3.1 Hệ quả được chứng minh. □

Trước khi tiếp tục, chúng ta sẽ đưa ra điều kiện đủ về tính liên tục của ánh xạ $\mathcal{C}^+$.

Bổ đề 3.2. *Cho X là tập con của $\mathbb{R}^m$(không gian Euclid m chiều) và $Y = \mathbb{R}^l$, ở đó m và l là số nguyên dương. Nếu $e(\cdot)$ là liên tục và, $C^+(\cdot)$ là nửa liên tục dưới và có đồ thị đóng, khi đó $\mathcal{C}^+(\cdot)$ là liên tục.*

Chứng minh. Ta bắt đầu bằng việc chứng minh tính nửa liên tục dưới của $\mathcal{C}^+(\cdot)$. Cho $x_0 \in X$ và $y_0 \in \mathcal{C}^+(x_0)$, khi đó $y_0 \in C^+(x_0)$ và $< y_0, e(x_0) >= 1$. Lấy dãy $x_n \longrightarrow x_0$, do tính nửa liên tục dưới của $C^+(\cdot)$, tồn tại $y_n \in C^+(x_n)$ sao cho $y_n \longrightarrow y_0$. Vì $< y_n, e(x_n) > \longrightarrow < y_0, e(x_0) > = 1$ nên ta có $< y_n, e(x_n) > \neq 0$ với n đủ lớn. Đặt $\widehat{y_n} = y_n / < y_n, e(x_n) >$, ta thấy rằng $\widehat{y_n} \in \mathcal{C}^+(x_n)$, và $\widehat{y_n} \longrightarrow y_0$. Khi ấy, theo Mệnh đề 1.2 ta có $\mathcal{C}^+$ là nửa liên tục dưới tại (x_0, y_0).

Bây giờ ta xem xét tính nửa liên tục trên của $\mathcal{C}^+(\cdot)$. Cho $x_0 \in X$, ta thấy rằng $\mathcal{C}^+(x_0)$ là tập compact trong $Y^* = Y$. Vì thế bởi Mệnh đề 1.5, để chứng minh tính nửa liên tục trên của $\mathcal{C}^+(\cdot)$ tại x_0 ta chỉ cần chứng minh rằng với mỗi dãy $(x_n, y_n) \in gr\mathcal{C}^+$, $n = 1, 2...$ với $x_n \longrightarrow x_0$, tồn tại một dãy con y_{n_k} hội tụ tới một điểm y_0 nào đó của $\mathcal{C}^+(x_0)$. Thực vậy, nếu $(x_n, y_n) \in gr\mathcal{C}^+$ thì $y_n \in C^+(x_n)$ và $< y_n, e(x_n) > = 1$. Do đó $\| y_n \| \neq 0$. Xét $\overline{y}_n = y_n / \| y_n \|$ với $n = 1, 2....$ Vì Y là không gian hữu hạn chiều, nên tồn tại một dãy $\overline{y}_{n_k}$ hội tụ tới một điểm $\overline{y}_0 \in Y$ nào đó với $\| \overline{y}_0 \| = 1$. Từ $< \overline{y}_{n_k}, e(x_{n_k}) > = 1/ \| y_{n_k} \|$ ta có $\| y_{n_k} \| \longrightarrow 1/ < \overline{y}_0, e(x_0) >$. Và do đó $y_{n_k} = \overline{y}_{n_k} \| y_{n_k} \| \longrightarrow \overline{y}_0 / < \overline{y}_0, e(x_0) >$. Đặt $y_0 = \overline{y}_0 / < \overline{y}_0, e(x_0) >$, ta có $< y_0, e(x_0) > = 1$. Vì $C^+(\cdot)$ có đồ thị đóng nên $(x_0, y_0) \in gr\ C^+$, tức là $y_0 \in C^+(x_0)$. Cùng với điều kiện $< y_0, e(x_0) > = 1$ ta có $y_0 \in \mathcal{C}^+(x_0)$ như mong muốn. □

Hệ quả 3.13. *Giả sử T và K là tập con khác rỗng của không gian Euclid hữu hạn chiều, và Y là không gian Euclid hữu hạn chiều. Giả sử điều kiện (ii) của Định lý 3.1 là thỏa mãn, với f^j được thay thế bởi $\overline{f}^j$. Giả sử thêm rằng:*

(i) *A_1 là ánh xạ liên tục có giá trị compact;*

(ii) *m^j là ánh xạ liên tục;*

(iii) *$e(\cdot)$ là liên tục, $C^+(\cdot)$ là nửa liên tục dưới và có đồ thị đóng.*

Khi đó, S^j là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Đây là kết quả của Hệ quả 3.12 và Bổ đề 3.2. □

Hệ quả 3.14. *Giả sử điều kiện (ii) của Định lý 3.1 là thỏa mãn với f^j được thay thế $\overline{f}^j$. Giả sử C là ánh xạ hằng được định nghĩa bởi (3.11), trong đó $\widehat{C} \subset Y$ là nón lồi, đóng, chính thường với int$\widehat{C} \neq \emptyset$ và cho $\widehat{e} \in$ int$\widehat{C}$. Giả sử thêm rằng*

(i) *A_1 là ánh xạ liên tục có giá trị compact;*

(ii) *m^j là ánh xạ liên tục trên $\widehat{\mathcal{C}}^+ \times T \times K \times K$, ở đó*

$$\widehat{\mathcal{C}}^+ = \{y^* \in \widehat{C}^+ :< y^*, \widehat{e} >= 1\}.$$

Khi đó, S^j là liên tục tại t_0.

Chứng minh. Tương tự như Hệ quả 3.12. □

Nhận xét 3.5. *Trong điều kiện (ii) của Hệ quả 3.5, các giả thiết về tính liên tục được áp dụng trực tiếp trên F. Trong khi ở điều kiện (ii) của Hệ quả 3.14, các giả thiết về tính liên tục được yêu cầu thỏa mãn trên hàm vô hướng hóa m^j của F. Đây chính là sự khác biệt giữa Hệ quả 3.5 và Hệ quả 3.14.*

Ví dụ 3.3. *Xét bài toán (P_t^1) với $T = [-4/5, -2/3] \subset \mathbb{R}, K = [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \widehat{C} = \mathbb{R}_+, A_0(t, x) \equiv A_1(t, x) \equiv K = [-1/2, 1/2]$. Mỗi $(t, x, \eta) \in T \times K \times K$, ta định nghĩa*

$$F(t, x, \eta) = \{s(t, x, \eta)\} \cup [4, 7] \subset \mathbb{R},$$

trong đó, $s(t, x, \eta)$ được cho như trong Ví dụ 3.1. Ta thấy, ánh xạ $F + \widehat{C}$ có giá trị lồi. Ta chứng minh rằng Hệ quả 3.14 có thể được áp dụng, với $j = 1$. Thực vậy, lấy $\widehat{e} = 1 \in$ int$\widehat{C}$, ta thấy rằng $\widehat{\mathcal{C}}^+ = \{1\}$. Cho $y^* \in \widehat{\mathcal{C}}^+ = \{1\}$, và với mỗi $(t, x, \eta) \in T \times K \times K$,

$$m^1(y^*, t, x, \eta) = \inf_{y \in F(t,x,\eta)} < y^*, y > = \inf_{y \in F(t,x,\eta)} y = s(t, x, \eta).$$

Do đó, m^1 là liên tục trên $\widehat{\mathcal{C}}^+ \times T \times K \times K$.

Ta có

$$\overline{s}^1(t,x,\eta) \;=\; \sup_{y^*\in\widehat{C}^+} m^1(y^*,t,x,\eta) \;=\; s(t,x,\eta).$$

Do định nghĩa

$$\overline{f}^1(t,x) = \sup_{\eta\in[-1/2,1/2]} \overline{s}^1(t,x,\eta);$$

nên ta thấy hàm $\overline{f}^1$ *chính là hàm* f*, được định nghĩa trong Ví dụ* 3.1*. Do đó, với mỗi* $t\in T$*, tập nghiệm* $S^1(t)$ *của bài toán* (P_t^1) *trong Ví dụ* 3.3 *là* $[0,1/2]$*. Từ những lập luận trong ví dụ này, ta thấy rằng tồn tại một hàm* $g : T\times K\times K \longrightarrow \mathbb{R}$ *liên tục sao cho các điều kiện* $(ii)_1$ *và* $(ii)_2$ *của Định lý* 3.1 *được thỏa mãn với mọi điểm* $t_0 \in domS^1 = T$ *và mọi điểm* $x_0 \in S^1(t_0)$*. Do đó, do Hệ quả* 3.14*, ánh xạ nghiệm* S^1 *trong ví dụ của chúng ta là liên tục trên* T*.*

Tiếp theo ta thấy rằng bài toán (P_t^1)*, được xây dựng như trong Ví dụ* 3.3*, có thể được hiểu như bài toán* $(P_t^{'})$*: Tìm một điểm* $x \in K := [-1/2,1/2]$ *sao cho, với mỗi* $\eta\in K$*,* $F(t,x,\eta) \not\subset -intC^{'}$*, ở đó* $C^{'} = -\mathbb{R}_+ \subset Y = \mathbb{R}$*. Đây là dạng bài toán đã được nghiên cứu trong* [8], [18]*. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là, kết quả về tính liên tục của bài toán* $(P_t^{'})$ *có thể được thiết lập bởi phương pháp vô hướng hóa tuyến tính của* [8], [18]*, hay không? Câu trả lời là không thể. Thực vậy, trong trường hợp này,* $C^{'+}\setminus\{0\} = \{\lambda\in\mathbb{R} : \lambda < 0\}$*, và do đó, mỗi* $\lambda \in C^{'+}\setminus\{0\}$*,*

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) :&= \{x\in[-1/2,1/2] : \lambda F(t,x,\eta)\not\subset -intR_+, \forall\eta\in[-1/2,1/2]\} \\ &= \{x\in[-1/2,1/2] : F(t,x,\eta)\not\subset intR_+, \forall\eta\in[-1/2,1/2]\} \\ &= \{x\in[-1/2,1/2] : F(t,x,\eta)\cap -R_+ \neq \emptyset, \forall\eta\in[-1/2,1/2]\} \\ &= S_t^1 = [0,1/2]. \end{aligned}$$

Một trong những đòi hỏi của phương pháp vô hướng hóa tuyến tính trong [8], [18] *(xem điều kiện (iii) của Định lý* 3.2 *trong* [18] *và điều kiện (iv) của Định lý* 4.1 *của* [8]*) là, mỗi* $\lambda\in C^{'+}\setminus\{0\}$*, và mỗi điểm* $(t,x)\in T\times K$ *với* $x \in K\setminus S_\lambda(t) = [-1/2,0[$*, tồn tại* $x^{'} \in S_\lambda(t) = [0,1/2]$ *sao cho*

$$F(t,x,x^{'}) + F(t,x^{'},x) + B(0,|x^{'}-x|) \subset -C^{'} = R_+, \tag{3.16}$$

ở đó, $B(0,|x^{'}-x|)$ *là ký hiệu của hình cầu mở, bán kính* $|x^{'}-x|$ *tâm tại gốc của* $Y = R$*. Rõ ràng, nếu* (3.16) *được thỏa mãn thì*

$$s(t,x,x^{'}) + s(t,x^{'},x) - |x^{'}-x| \geq 0.$$

Nhưng như chúng ta thấy trong Ví dụ 3.1, *điều này là không thể. Do đó, phương pháp vô hướng hóa tuyến tính trong* [8], [18] *không thể áp dụng cho bài toán* (P_t'), *tức là, kết quả về tính liên tục trong Ví dụ* 3.3 *không thể nhận được từ* [8], [18].

Kết luận Chương 3

Nội dung chính của Chương 3 là:

1. Trình bày các kết quả về sự liên tục của ánh xạ nghiệm không yếu của các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng (xem Định lý 3.1 và các hệ quả tương ứng).

2. Trình bày một số kết quả về sự liên tục nghiệm với sự tham gia của các hình nón đối ngẫu với hình nón xuất phát của bài toán ban đầu (xem Định lý 3.2 và các hệ quả).

KẾT LUẬN

Dựa trên bài báo: "P. H. Sach, N. B. Minh (2013), *Continuity of solution mappings in some parametric non-weak vector Ky Fan inequalities*, J. Optim. Theory Appl., $(57), 1401 - 1418$.", (xem [22]) và những kiến thức về giải tích đa trị, luận văn đã trình bày một số kết quả về tính liên tục của ánh xạ nghiệm không yếu của các bài toán bất đẳng thức véc tơ Ky Fan suy rộng, bằng cách sử dụng phương pháp vô hướng hóa phi tuyến. Ý tưởng chính của phương pháp là thay điều kiện (3.1) (hoặc (3.2)) của bài toán (P_t^1) (hoặc bài toán (P_t^2)) bằng các điều kiện vô hướng tương đương và đưa việc tìm điều kiện đủ về tính liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán về việc tìm các điều kiện đặt trên các hàm f^1 (hoặc f^2). Lợi thế của phương pháp này là ở chỗ nó tránh được các giả thiết cơ bản trong phương pháp vô hướng hóa tuyến tính là các giả thiết lồi theo nón và tính đơn điệu chặt của ánh xạ mục tiêu.

Đóng góp của tác giả luận văn là tìm được một số ví dụ mới để minh họa cho các kết quả trên. Cụ thể, Ví dụ 3.1 minh họa cho Bổ đề 3.1, Ví dụ 3.2 minh họa cho Hệ quả 3.1, Ví dụ 3.3 minh họa cho Hệ quả 3.14.

Tài liệu tham khảo

[1] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Nguyễn Đông Yên (2007), *Giáo trình giải tích đa trị*, Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

[3] Nguyễn Xuân Tấn, Nguyễn Bá Minh (2006), *Một số vấn đề trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[4] Aubin, J.P. (1979), *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland, Amsterdam.

[5] Berge, C. (1963), *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, London.

[6] Blum, E., Oettli, W. (1993), "From optimization and variational innequalities to equilibrium problems", *The Math. Student*, $(64), 1-23$.

[7] Chen, C.R., Li, S.J., Teo, K.L. (2009), "Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems", *J. Glob. Optim.*, $(45), 309-318$.

[8] Chen, B., Huang, N-J. "Continuity of the solution mapping to parametric generalized vector Ky Fan inequality problem", *J. Glob. Optim.*, doi: $10.1007/s10898-012-9904-5$.

[9] Chen, G.Y., Yang, X.Q., Yu, H. (2005), "A nonlinear scalarization function and generalized quasi - vector equilibrium problems", *J. Glob. Optim.*, $(32), 451-466$.

[10] Cheng, Y.H., Zhu, D.L. (2005), "Global stability results for the weak vector variational inequality", *J. Glob. Optim.*, $(32), 543-550$.

[11] Dunford,N., Schwart, J., Linear Operators (1963), Interscience Publishers, New York.

[12] Gong, X.H. (2008), "Continuity of the solution set to parametric vector equilibrium problem", *J. Optim. Theory Appl.*, $(139), 35 - 46$.

[13] Gopfert, A., Riahi, H., Tammer, C., Zalinescu, C. (2003), "Variational Methods in Partially Ordered Spaces", *Springer, New York.*

[14] Jeyakumar, V.,Oettli, W., Natividad, M. (1993), "A solvability theorem for a class of quasiconvex mappings with applications to optimization", *J. Math. Anal. Appl.*, $(179), 537 - 546$.

[15] Fan, K. (1972), *A minimax inequality and its application*, In: Shisha, O. (ed.) Inequalities III, Academic Press, New York, pp.$103 - 113$.

[16] Khanh, P.Q., Luc, .D.T. (2008), "Stability of solutions in parametric variational relation problems", *Set-Valued Anal.*, $(16), 1015 - 1035$.

[17] Li, S.J., Liu, H.M., Chen, C.R. (2010), "Lower semicontinuity of parametric generalized weak vector equilibrium problems", *Bull. Austral. Math. Soc*, $(81), 85 - 95$.

[18] Peng, Z.Y., Yang, X.M., Peng, J.W. (2012), "On the lower semicontinuity of the solution mappings to parametric weak generalized Ky Fan inequality", *J. Optim., Theory Appl.*, $(152), 256 - 264$.

[19] Tuan, L.A., Lee, G.M., Sach, P.H. (2010), "Upper semicontinuity in a parametric general variational problem and application", *Nonlinear Anal.*, $(72), 1500-1513$.

[20] Sach, P.H. (2012), "New nonlinear scalarization functions and applications", *Nonlinear Anal.*, $(75), 2281 - 2292$.

[21] Sach, P.H., Tuan, L.A. (2013) "New scalarizing approach to the stability analysis in parametric generalized Ky Fan inequality problems", *J. Optim. Theory Appl.*, $(157), 347 - 364$.

[22] Sach, P.H., Minh, N.B. (2013), “Continuity of solution mappings in some parametric non - weak vector Ky Fan inequalities”, *J. Glob. Optim. Appl.*, $(57), 1401 - 1418$.