Mục lục

Lời nói đầu

Được xây dựng bởi Giáo sư L.Zadeh [15] vào năm 1965, lý thuyết mờ đã và đang phát triển rất nhanh, đa dạng, ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Công nghệ mờ đã cung cấp những công nghệ mới cho các ngành công nghiệp làm ra nhiều sản phẩm thông minh, đáp ứng nhu cầu thị trường cần có những bộ điều khiển linh hoạt hơn, những thiết bị biết làm việc với những bài toán khó, xử lý nhiều loại thông tin mờ, chưa đầy đủ và thiếu chính xác.

Không dừng lại ở đó, năm 1983 K.T.Atanassov đã đưa ra khái niệm tập mờ trực cảm [2], đã góp phần to lớn vào hệ thống lý thuyết mờ, khắc phục được những hạn chế của tập mờ, đặc biệt khi làm việc với các đối tượng ngữ nghĩa tự nhiên mà việc đưa ra độ thuộc không chưa đủ và được áp dụng trong nhiều lĩnh vực như hệ hỗ trợ quyết định, y khoa, bầu cử, kinh doanh,...

Sự xuất hiện tập mờ trực cảm kéo theo một hệ thống lý thuyết được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi. Trong đó quan hệ mờ trực cảm là một lý truyết rất quan trọng. Quan hệ mờ trực cảm biểu thị mối liên hệ giữa nhiều đại lượng. Trong thực tiễn thực chất quan hệ mờ trực cảm là các quan hệ giữa các biến nhận giá trị ngôn ngữ. Vì thế quan hệ mờ với các bài toán thực tiễn có vai trò rất quan trọng. Nhận thấy điều đó nên chúng tôi chọn đề tài **"Quan hệ mờ trực cảm"** cho luận văn của mình. Luận văn trình bày một cách hệ thống về lôgic mờ, mờ trực cảm, quan hệ mờ trực cảm và bước đầu tìm hiểu quan hệ mờ bức tranh. Luận văn gồm ba chương.

Chương 1 "**Giới thiệu tập mờ và tập mờ trực cảm**" trình bày một số định nghĩa cơ bản về tập mờ và tập mờ trực cảm cùng các phép toán và hệ thống logic mờ.

Chương 2 "**Quan hệ mờ trực cảm và ứng dụng**" chủ yếu trình bày một số tính chất, định lí, mệnh đề của quan hệ mờ trực cảm, và giới thiệu một ứng dụng của quan hệ mờ trực cảm trong chuẩn đoán y khoa.

Chương 3 "**Quan hệ mờ bức tranh và ứng dụng**" bước đầu mở rộng quan hệ mờ trực cảm sang quan hệ mờ bức tranh và đề xuất tiếp cận mới trong chuẩn đoán y khoa sử dụng phép hợp thành của quan hệ mờ bức tranh.

Luận văn được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của PGS. TSKH. Bùi Công Cường.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy Bùi Công Cường, thầy đã tận tình dạy dỗ, hướng dẫn và đưa ra cho tác giả nhiều những chỉ bảo quý báu trong quá trình tác giả làm luận văn.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô và cán bộ công nhân viên của Viện Toán học đã quan tâm giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện. Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn các anh, chị cùng những người bạn trong tập thể Seminar Hệ mờ- nơron (Viện Toán Học) đã chia sẻ kinh nghiệm, giáo trình, tài liệu và giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Hà Nội, ngày 26 tháng 2 năm 2015

Phạm Thị Thêm

Danh sách hình vẽ

Danh sách bảng

Chương 1
Giới thiệu tập mờ, tập mờ trực cảm

Chương này trình bày những khái niệm cơ bản nhất của tập mờ [1, 15] và tập mờ trực cảm [2].

1.1. Tập mờ và một vài phép toán

Trong lý thuyết tập hợp cổ điển, khi xét quan hệ của một phần tử với một tập hợp thì có hai giá trị: 0 (nếu không thuộc) và 1 (nếu thuộc). Các tập hợp như vậy được gọi là các tập rõ.

Cho tập $X \neq \varnothing$, tập A (rõ) là tập con của X được xác định bởi hàm đặc trưng

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\to \{0, 1\} \\ z &\mapsto \chi_A(z). \end{aligned}$$

Trong đó $\chi_A(z) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad z \in A, \\ 0 & \text{nếu} \quad z \notin A. \end{cases}$

Khi đó A được gọi là không gian nền (tập nền).

Trong thực tế, có những tập hợp mà các đối tượng không định nghĩa rõ ràng về hàm đặc trưng. Ví dụ tập *"Những người đàn ông cao $1.7m$"* là một tập rõ, tập *"những người đàn ông cao lớn"* thì không có định nghĩa cụ thể của *"cao lớn"*.

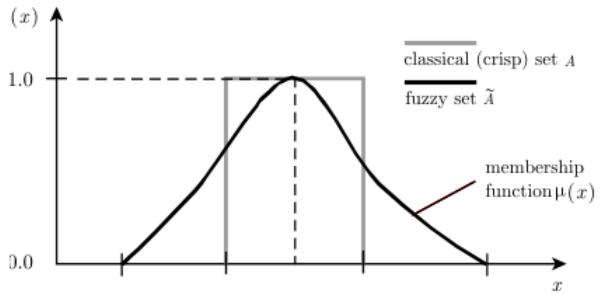
Khái niệm *tập mờ* được L.A.Zadeh đưa ra đầu tiên vào năm 1965 nhằm mục đích mô tả những tập hợp *không rõ ràng*, nghiên cứu các *hệ thống bất định*.

Định nghĩa 1.1. *Cho tập $X \neq \varnothing$, A là một tập mờ trên không gian nền X nếu A được xác định bởi hàm: $\mu_A : X \to [0, 1]$ trong đó μ_A gọi là hàm thuộc, còn $\mu_A(x)$ gọi là độ thuộc của x vào tập mờ A.*

Đôi khi người ta có thể kí hiệu $A(x)$ thay cho $\mu_A(x)$.

Trong các phần tiếp theo, ta luôn kí hiệu

$$F(X) = \left\{ A | A \,\text{là tập mờ trên}\, X \right\}.$$



Hình 1.1 Tập mờ và tập rõ

Ta có thể biểu diễn tập mờ A trên không gian nền X theo hai cách như sau:
$A = \left\{ \Big(x, \mu_A(x)\Big) : x \in X \right\}$ hoặc $A = \left\{ \Big(\mu_A(x)/x\Big) : x \in X \right\}$.

Ví dụ 1.2.

(i) $A =$ "số thực gần 10" có thể có hàm thuộc $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+(x-10)^2}$.

(ii) $X = [0, 130]$ tập tuổi đời của con người.
$A =$ "tuổi trung niên".
Khi đó A là tập mờ trên không gian nền X.

(iii) Dấu vân tay "tội phạm" để lại tại hiện trường cũng là tập mờ.

(iv) $X = [-20°, 50°]$ tập nhiệt độ ngoài trời. $A =$ "Nhiệt độ nóng" là tập mờ trên không gian nền X.

Định nghĩa 1.3.
Giá của tập mờ A là tập $S(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$.
Với mỗi $0 \leq \alpha \leq 1$ *tập mức* A_α *cho bởi:* $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Tương tự như đối với tập rõ, người ta định nghĩa các phép toán và quan hệ trên tập mờ.

Định nghĩa 1.4. *Cho* $A, B \in F(X)$.
Khi đó phép hợp $A \cup B$*, phép giao* $A \cap B$ *và phần bù* A^C *là các tập mờ trên* X *với các hàm thuộc cho bởi:*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ \forall x \in X.$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left\{\mu_A(x),\, \mu_B(x)\right\},\, \forall x \in X.$$
$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x),\, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.5. *Cho $A, B \in F(X)$. Ta nói:*

$$A \subseteq B \text{ nếu } \mu_A(x) \le \mu_B(x),\, \forall x \in X.$$

$$A \supseteq B \text{ nếu } \mu_A(x) \ge \mu_B(x),\, \forall x \in X.$$

$$A = B \text{ nếu } \mu_A(x) = \mu_B(x),\, \forall x \in X.$$

Hệ quả 1.6. *Cho $A, B \in F(X)$.*
Khi đó $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ và $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.
Coi $\varnothing$ là tập mờ với $\mu_\varnothing(x) = 0$ với mọi x, X là tập mờ với $\mu_X(x) = 1$ với mọi x.

Hệ quả 1.7. *$A, B, C \in F(X)$. Các tập A, B, C có các tính chất sau:*
1. Giao hoán: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
2. Kết hợp: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. Lũy đẳng: $A \cap A = A$; $A \cup A = A$.
4. Phân phối:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,;$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

5. $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup X = X$.
6. Đồng nhất: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap X = A$.
7. Hấp thụ: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.
8. Luật De Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
9. Cuộn: $\left(A^C\right)^C = A$.
10. Dạng tương đương: $\left(A^C \cup B\right) \cap \left(A \cup B^C\right) = \left(A^C \cap B^C\right) \cup (A \cap B)$.
11. Hiệu đối xứng: $\left(A^C \cap B\right) \cup \left(A \cap B^C\right) = \left(A^C \cup B^C\right) \cap (A \cup B)$.

1.2. Lôgic mờ

1.2.1. Những khái niệm cơ bản trong lôgic cổ điển

Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập hợp các mệnh đề và $P, P_1, P_2, Q_1, Q, \ldots$ là những mệnh đề. Với mỗi mệnh đề $P \in \mathcal{P}$ gán giá trị $v(P)$ là giá trị chân lý (độ đúng) của mệnh đề. Lôgic cổ điển quy định $v(P) = 1$ nếu P là đúng (T-true), $v(P) = 0$ nếu P là sai (F- false).

Trên $\mathcal{P}$ xác định ba phép toán cơ bản sau đây.

1. Phép tuyển: P OR Q, kí hiệu $P \vee Q$, là mệnh đề " hoặc P hoặc Q".

2. Phép hội: P AND Q, kí hiệu $P \wedge Q$, là mệnh đề "vừa P vừa Q".
3. Phép phủ định: NOT P, ký hiệu $\neg P$, là mệnh đề "không P".

Từ ba phép toán lôgic cơ bản này, người ta đã định nghĩa nhiều phép toán khác. Một trong số những phép toán quan trọng khác là phép kéo theo, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Khi sử dụng các liên kết lôgic: phép tuyển, phép hội, phép phủ định, phép kéo theo và phép tương đương ($\Leftrightarrow$), giá trị chân lý của mệnh đề hệ quả được xác định phụ thuộc vào giá trị chân lý của các mệnh đề gốc P, Q cho trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1 Giá trị chân lý của các mệnh đề.

P	Q	$\neg P$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

1.2.2. Một số phép toán cơ bản trong lôgic mờ

Từ lôgic cổ điển, người ta suy rộng các phép liên kết lôgic cơ bản với các mệnh đề có giá trị chân lý $v(P)$ nhận giá trị trong đoạn $[0,1]$, (thay cho quy định $v(P)$ chỉ nhận giá trị 1 hoặc 0).

Cho các mệnh đề $P, Q, P_1 \dots$ giá trị chân lý $v(P), v(Q), v(P1) \dots$ sẽ nhận giá trị trong đoạn $[0,1]$.

Phần này giới thiệu ba phép toán cơ bản nhất của lôgic mờ.

a) Phép phủ định

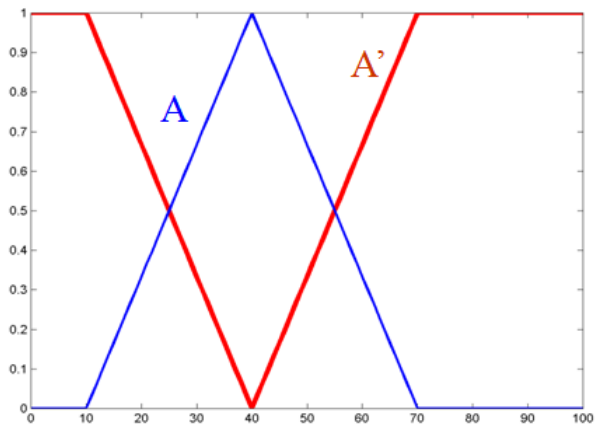
Định nghĩa 1.8. *Hàm $n : [0,1] \to [0,1]$ không tăng thỏa mãn điều kiện $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, gọi là hàm phủ định (negation – hay phép phủ định).*

Định nghĩa 1.9.

a) Hàm phủ định n là chặt nếu nó là hàm liên tục và giảm chặt.

b) Hàm phủ định n là mạnh nếu nó là chặt và thỏa mãn

$$n\left(n(x)\right) = x,\ \forall x \in [0,1].$$



Hình 1.2 Hàm thuộc của A và A' (hay A*).

Ví dụ 1.10 (Một số ví dụ về hàm phủ định).

(i) Hàm phủ định thường dùng $n(x) = 1 - x$.

(ii) Hàm phủ định $n(x) = 1 - x^2$.

(iii) Họ phủ định (Sugeno,1997) $N_\lambda(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, $\lambda > -1$.

Hàm $(1-x)$ là phủ định mạnh còn $(1-x^2)$ là một phủ định chặt, nhưng không mạnh.

Định nghĩa 1.11 (Một cách định nghĩa phần bù của một tập mờ). *Cho X là không gian nền, một tập mờ A trên X tương ứng với hàm thuộc $A : X \to [0, 1]$.*

Cho n là hàm phủ định, phần bù A^C của tập mờ A là một tập mờ với hàm thuộc cho bởi $A^C(a) = n(A(a))$, với mỗi $a \in X$.

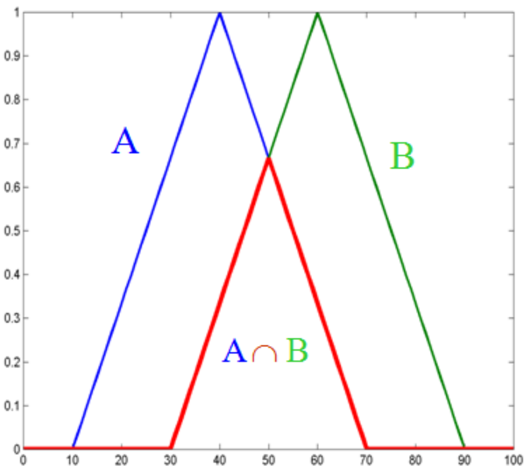
Ta thấy định nghĩa phần bù trong mục 1.1 là trường hợp riêng khi $n(x)$ là hàm phủ định thường dùng.

b) Phép hội

Phép hội (phép and-conjunction) là một trong những phép toán cơ bản nhất. Thường xét các tiên đề sau cho $v(P \wedge Q)$:

1. $v(P_1 \text{ and } P_2)$ chỉ phụ thuộc vào $v(P_1)$ và $v(P_2)$.
2. Nếu $v(P_1) = 1$ thì $v(P_1 \text{ and } P_2) = v(P_2)$ với mọi mệnh đề P_2.
3. Giao hoán: $v(P_1 \text{ and } P_2) = v(P_2 \text{ and } P_1)$.
4. Nếu $v(P_1) \le v(P_2)$, thì $v(P_1 \text{ and } P_3) \le v(P_2 \text{ and } P_3)$ với mọi mệnh đề P_3.

5. Kết hợp: $v\left(P_1 \text{ and } (P_2 \text{ and } P_3)\right) = v\left((P_1 \text{ and } P_2) \text{ and } P_3\right)$.



Hình 1.3 Hàm thuộc của $A \cap B$.

Dựa trên phép toán lôgic trên người ta suy rộng ra phép hội mờ như một hàm số $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, thỏa một số tiên đề sau:

Định nghĩa 1.12. *Hàm $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ là một $t-$chuẩn (chuẩn tam giác hay $t-$norm) nếu thỏa mãn các điều kiện sau:*

a) $T(1,x) = x$, với mọi $0 \leq x \leq 1$.

b) T có tính giao hoán, tức là $T(x,y) = T(y,x)$ với mọi $0 \leq x, y \leq 1$.

c) T không giảm theo nghĩa $T(x,y) \leq T(u,v)$ với mọi $x \leq u$, $y \leq v$.

d) T có tính kết hợp, tức là $T\left(x, T(y,z)\right) = T\left(T(x,y), z\right)$ với mọi $0 \leq x,\ y,\ z \leq 1$.

Từ những tiên đề trên suy ra $T(0,x) = T(x,0) \leq T(1,0) = 0$.

Ví dụ 1.13. *Một số ví dụ về $t-$chuẩn*

(i) Min (Zadeh): $T_1(x,y) = \min(x,y)$.

(ii) $T_2(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}$.

(iii) $t-$chuẩn dạng tích: $T_3(x,y) = xy$.

(iv) $T_4(x,y) = \dfrac{xy}{2-(x+y-xy)}$.

(v) $t-$chuẩn Lukasiewicz: $T_L(x,y) = \max\{x+y-1, 0\}$.

(vi) $t-$chuẩn yếu nhất (drastic product):

$$Z(x,y)=\begin{cases}\min(x,y) & \text{nếu} \quad \max(x,y)=1,\\ 0 & \text{nếu} \quad \max(x,y)<1.\end{cases}$$

Sau đây ta xét một vài tính chất của $t-$chuẩn.

Mệnh đề 1.14. *Với mỗi $t-$chuẩn T thì*
$Z(x,y) \le T(x,y) \le T_1(x,y) = \min(x,y)$ *với mọi* $0 \le x,\ y \le 1$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:
Trường hợp 1: $\max(x,y)=1$.
Khi $x=1$ thì $T(1,y)=y=\min(x,y)$ hay $Z(x,y)=T(x,y)=T_1(x,y)$.
Khi $y=1$ thì $T(x,1)=x=\min(x,y)$ hay $Z(x,y)=T(x,y)=T_1(x,y)$.
Trường hợp 2: $\max(x,y)<1$.
Khi đó $Z(x,y)=0<T(x,y)$.
Giả sử $\min(x,y)=y$, khi đó $T(x,y) \le T(1,y)=y=T_1(x,y)$.
$\Rightarrow Z(x,y) \le T(x,y) \le T_1(x,y)$.
Chứng minh tương tự với $\min(x,y)=x$. □

Khi đó người ta định nghĩa phép giao của hai tập mờ như sau:

Định nghĩa 1.15. *Ứng với $t-$chuẩn T, tập giao của hai tập mờ A, B là một tập mờ $(A \cap_T B)$ trên X với hàm thuộc cho bởi*

$$(A \cap_T B)(x) = T(A(x),\ B(x)),\ \forall x \in X.$$

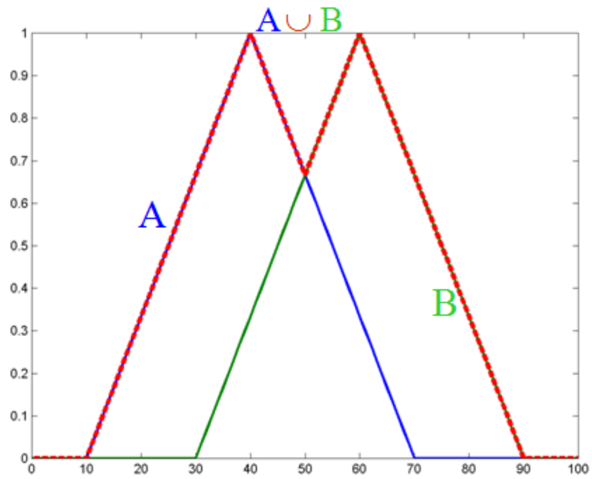
Việc lựa chọn phép giao tương ứng với $t-$chuẩn T nào tùy thuộc vào bài toán được quan tâm.

c) Phép tuyển

Phép tuyển hay toán tử lôgic OR thông thường thỏa mãn các tiên đề sau:

Định nghĩa 1.16. *Hàm $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ gọi là phép tuyển (OR, suy rộng, hay là $t-$đối chuẩn ($t-$ conorm)) nếu thỏa mãn các điều kiện sau:*
a) $S(0,x)=x$, với mọi $0 \le x \le 1$.
b) S có tính giao hoán, tức là $S(x,y)=S(y,x)$ với mọi $0 \le x,y \le 1$.
c) S không giảm theo nghĩa $S(x,y) \le S(u,v)$, với mọi $x \le u,\ y \le v$.
d) S có tính kết hợp, tức là $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$
với mọi $0 \le x,\ y,\ z \le 1$.

Từ định nghĩa: $S(0,x) \le S(x,1) \Leftrightarrow 1 \le S(x,1) \le 1 \Rightarrow S(x,1)=1$.



Hình 1.4 Hàm thuộc của $A \cup B$

Ví dụ 1.17. *Các hàm $t-$đối chuẩn*

$S_0(x, y) = \max(x, y)$.

$S_1(x, y) = x + y - xy$.

$S_2(x, y) = \min(1, x + y)$.

$$S_3(x, y) = \max_1(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{nếu} \quad x + y = 1, \\ 1 & \text{nếu} \quad x + y \neq 1. \end{cases}$$

$$S_4(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{nếu} \quad \min(x, y) = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad \min(x, y) \neq 0. \end{cases}$$

Ta cũng có định nghĩa tổng quát của phép hợp hai tập mờ.

Định nghĩa 1.18. *Ứng với $t-$chuẩn S, phép hợp của hai tập mờ A, B là một tập mờ $(A \cup_S B)$ trên X với hàm thuộc cho bởi*

$$(A \cup_S B)(x) = S(A(x),\ B(x)),\ \forall x \in X.$$

Việc lựa chọn phép giao tương ứng với $t-$đối chuẩn S nào tùy thuộc vào bài toán được quan tâm.

Bộ ba De Morgan

Ta đã biết luật De Morgan nổi tiếng

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ và $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, trong đó A, B là hai tập con của X.

Sau đây là một dạng suy rộng của hai đẳng thức trên cho lôgic mờ.

Định nghĩa 1.19. *Cho T là $t-$chuẩn, S là $t-$đối chuẩn, và n là phép phủ định mạnh. Chúng ta nói bộ ba (T, S, n) là một bộ ba De Morgan nếu thỏa* *mãn một trong hai đẳng thức sau:*

$$(S(x,y)) = n\left(T(n(x),n(y))\right) \text{ hoặc } (T(x,y)) = n\left(S(n(x),n(y))\right).$$

*Khi đó ta nói T và S **đối ngẫu** với nhau, bộ ba (T,S,n) là liên tục nếu T và S là hai hàm liên tục.*

Quan hệ đối ngẫu giữa $t-$chuẩn và $t-$đối chuẩn có thể thấy qua định lý sau:

Định lí 1.20. *Cho n là phép phủ định mạnh*
a) Cho $S(x,y)$ là một $t-$đối chuẩn và $T(x,y)$ cho bởi

$$T(x,y) = n\left(S\left(n(x),n(y)\right)\right), \ \forall x,y \in [0,1].$$

Khi đó $T(x,y)$ là $t-$chuẩn.
b) Cho $T(x,y)$ là một $t-$chuẩn và $S(x,y)$ cho bởi

$$S(x,y) = n\left(T\left(n(x),n(y)\right)\right), \ \forall x,y \in [0,1].$$

Khi đó $S(x,y)$ là $t-$đối chuẩn.

1.2.3. Quan hệ mờ

Định nghĩa 1.21. *Cho X, Y là hai không gian nền. R là một quan hệ mờ trên $X \times Y$ nếu R là một tập mờ trên $X \times Y$, tức là có một hàm thuộc*

$$\mu_R : X \times Y \to [0,1].$$

Ở đây ta kí hiệu $R(x,y) = \mu_R(x,y)$ là độ thuộc của (x,y) vào quan hệ R.

Định nghĩa 1.22. *R là quan hệ mờ trên $X \times X$ ta có các định nghĩa*
(i) R là phản xạ nếu $R(x,x) = 1$, $\forall x \in X$.
(ii) R là đối xứng nếu $R(x,y) = R(y,x)$, $\forall x,y \in X$.
(iii) R là min -bắc cầu nếu $R(x,z) \geq R(x,y) \wedge R(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$ với $\wedge = \min$.

Định nghĩa 1.23. *Một quan hệ mờ R trên $X \times X$ là một quan hệ mờ tương đương nếu R là phản xạ, đối xứng, và min -bắc cầu.*

Định nghĩa 1.24. $\alpha-$cắt R_α
R là quan hệ mờ trên $X \times X$ khi đó α -cắt R_α được định nghĩa bởi

$$R_\alpha = \{(x,y) \, : R(x,y) \geq \alpha\}$$

là một tập con của $X \times X$.

Ta có thể đồng nhất R_α với một hàm đặc trưng

$$R_\alpha : X \times X \to \{0,1\}$$
$$(x,y) \mapsto R_\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad (x,y) \in R_\alpha, \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) \notin R_\alpha. \end{cases}$$

Khi đó R_α là
(i) Phản xạ nếu $R_\alpha(x,x) = 1, \forall x \in X$.
(ii) Đối xứng nếu $R_\alpha(x,y) = 1$ thì $R_\alpha(y,x) = 1, \forall x, y \in X$.
(iii) Bắc cầu nếu $R_\alpha(x,y) = R_\alpha(y,z) = 1$ thì $R_\alpha(x,z) = 1, \forall x, y, z \in X$.

Định lí 1.25. *Nếu R là một quan hệ mờ trên $X \times X$ thì R là quan hệ mờ tương đương $\Leftrightarrow$ mỗi α-cắt R_α cảm sinh một quan hệ tương đương R_α trên $X \times X$.*

Chứng minh.
($\Rightarrow$) Nếu R là quan hệ mờ tương đương trên $X \times X$, ta đi chứng minh với mọi $\alpha \leq 1$, R_α là một quan hệ tương đương .

(i) Vì $R(x,x) = 1 \geq \alpha, \ \forall \alpha \leq 1$ nên $\forall \alpha$, $(x,x) \in R_\alpha \Rightarrow R_\alpha(x,x) = 1$.

(ii) Nếu $R_\alpha(x,y) = 1$ thì $R(x,y) \geq \alpha$.
Ta có R tương đương nên $R(x,y) = R(y,x)$ suy ra

$$R(y,x) \geq \alpha \Rightarrow (y,x) \in R_\alpha \Rightarrow R_\alpha(y,x) = 1.$$

(iii) Nếu $(x,y), (y,z) \in R_\alpha$ thì $\begin{cases} R(x,y) \geq \alpha, \\ R(y,z) \geq \alpha. \end{cases}$
Ta có R tương đương nên $R(x,z) \geq R(x,y) \wedge R(y,z) \geq \alpha$ suy ra

$$(x,z) \in R_\alpha \Rightarrow R_\alpha(x,y) = R_\alpha(y,z) = 1 \text{ thì } R_\alpha(x,z) = 1.$$

Vậy R_α là quan hệ tương đương.
($\Leftarrow$) Nếu với mỗi $0 \leq \alpha \leq 1$, R_α là quan hệ tương đương ($*$), ta chứng minh R là quan hệ mờ tương đương.

(i) Ta chứng minh $R(x,x) = 1$ với mọi $x \in X$.
Ta có $R_\alpha(x,x) = 1$ suy ra $R(x,x) \geq \alpha$ với mọi $0 \leq \alpha \leq 1$.
Giả sử $R(x,x) < 1$ thì tồn tại $\alpha = 1$ và $(x,x) \notin R_1 \Rightarrow R_1(x,x) = 0$
$\Rightarrow R_1$ không tương đương (mâu thuẫn với ($*$)).
Vậy $R(x,x) = 1$ với mọi $x \in X$.

(ii) Ta chứng minh $R(x,z) \geq R(x,y) \wedge R(y,z)$, $\forall\, x,y,z \in X$.
Vì R_α là tương đương nên $(x,y); (y,z) \in R_\alpha$ thì $(x,z) \in R_\alpha$.

tức là $\begin{cases} R(x,y) \geq \alpha, \\ R(y,z) \geq \alpha \end{cases}$ thì $R(x,z) \geq \alpha$ với mọi $\alpha \leq 1$.

Giả sử $R(x,z) < R(x,y) \wedge R(y,z)$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $R(x,y) < R(y,z)$.

Chọn β sao cho $R(x,z) < \beta < R(x,y)$ khi đó

$$R_\beta(x,y) = R_\beta(y,z) = 1, R_\beta(x,z) = 0.$$

Vậy R_β không tương đương (mâu thuẫn với $(*)$).

Trường hợp 2: $R(x,y) > R(y,z)$.

Chọn β sao cho $R(x,z) < \beta < R(y,z)$ khi đó

$$R_\beta(x,y) = R_\beta(y,z) = 1, R_\beta(x,z) = 0.$$

Vậy R_β không tương đương (mâu thuẫn với $(*)$) suy ra điều phải chứng minh.

(iii) Ta chứng minh với mọi $x, y \in X$ thì $R(x,y) = R(y,x)$.
Vì R_α tương đương nên $R(x,y) \geq \alpha$ thì $R(y,x) \geq \alpha, \forall\, 0 \leq \alpha \leq 1$.
Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $R(x,y) < R(y,x)$

Chọn β sao cho $R(x,y) < \beta < R(y,x)$ khi đó

$$R_\beta(y,x) = 1,\ R_\beta(x,y) = 0.$$

Vậy R_β không tương đương (mâu thuẫn với $(*)$) suy ra điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $R(x,y) > R(y,x)$ ta chứng minh tương tự.

Vậy $R(x,y) = R(y,x)$.

Vậy R là quan hệ mờ tương đương. $\square$

Một số phép toán của quan hệ mờ

Định nghĩa 1.26. *Cho R_1 và R_2 là hai quan hệ mờ trên $X \times Y$, ta có các định nghĩa sau:*

a) Hợp của hai quan hệ mờ R_1, R_2 là một quan hệ mờ $R_1 \cup R_2$ với

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) = \max\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}, \forall (x,y) \in X \times Y.$$

b) Giao của hai quan hệ mờ R_1, R_2 là một quan hệ mờ $R_1 \cap R_2$ với

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \min\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}, \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Định nghĩa 1.27. *Cho R_1 và R_2 là hai quan hệ mờ trên $X \times Y$, ta nói:*
$R_1 \subseteq R_2$ nếu $\mu_{R_1}(x,y) \le \mu_{R_2}(x,y)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$.
$R_1 \supseteq R_2$ nếu $\mu_{R_1}(x,y) \ge \mu_{R_2}(x,y)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$.
$R_1 = R_2$ nếu $\mu_{R_1}(x,y) = \mu_{R_2}(x,y)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$.

Định nghĩa 1.28 (Quan hệ mờ trên những tập mờ)**.** *Cho tập mờ A trên X với hàm thuộc $\mu_A(x)$, tập mờ B trên Y với hàm thuộc $\mu_B(y)$. Quan hệ mờ trên các tập mờ A và B là quan hệ mờ R trên $X \times Y$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{aligned} \mu_R(x,y) &\le \mu_A(x), \forall y \in Y, \\ \mu_R(x,y) &\le \mu_B(y), \forall x \in X. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.29. *Cho quan hệ mờ R trên $X \times Y$*
a) Phép chiếu của R lên X là $proj_X R = \{(x, \max_y \mu_R(x,y)) : x \in X\}$.
b) Phép chiếu của R lên Y là $proj_Y R = \{(y, \max_x \mu_R(x,y)) : y \in Y\}$.

1.2.4. Phép hợp thành của quan hệ mờ

Định nghĩa 1.30 (Phép hợp thành max-min)**.** *Cho R_1 là quan hệ mờ trên $X \times Y$ và R_2 là quan hệ mờ trên $Y \times Z$. Khi đó hợp thành* $\max - \min$ *$R_1 \circ R_2$ của R_1, R_2 là quan hệ mờ trên $X \times Z$ được xác định bởi*

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \max_y \{\min(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z))\}, \forall (x,z) \in X \times Z.$$

Ta xét ví dụ cụ thể sau:
Ta muốn mô tả quan hệ giữa
$X = \{$các ngành học của khoa toán của đại học sư phạm Hà Nội $\}$ và
$Z = \{$Các mức thu nhập(TN) lúc đi làm$\}$.

Đây là các tập mờ, khó biểu diễn trực tiếp quan hệ giữa chúng. Dựa vào kinh nghiệm bản thân chúng tôi xây dựng hai quan hệ R_1 trên $X \times Y$ và R_2 là quan hệ mờ trên $Y \times Z$ trong đó

$$Y = \{\text{Các dạng công việc có thể xin được}\}\ .$$

Giả sử $X = \{$Đại số, Giải tích, Phương pháp dạy học$\}$ là tập các ngành học.
$Y = \{$dạy đại học, làm nghiên cứu, dạy phổ thông$\}$ là tập các công việc có thể xin được.
Ta có quan hệ mờ R_1 cho bởi ma trận giá trị sau:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Với $Z = \{$TN cao, TN khá, TN bình thường, TN thấp$\}$ quan hệ mờ R_2 trên $Y \times Z$ được cho bởi ma trận giá trị sau:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó quan hệ giữa các ngành học và mức thu nhập khi đi làm thu được qua phép hợp thành max-min của R_1 và R_2 thể hiện trong ma trận giá trị sau:

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Tương tự như vậy ta cũng xây dựng được một số phép hợp thành khác của quan hệ mờ

Định nghĩa 1.31.
a) Hợp thành $\max -$*prod cho bởi:*

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y \{(\mu_{R_1}(x, y) . \mu_{R_2}(y, z))\}, \forall (x, z) \in X \times Z.$$

b) Hợp thành $\max - *$ *với* $*$ *là một t-chuẩn.*

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y \{(\mu_{R_1}(x, y) * \mu_{R_2}(y, z))\}, \forall (x, z) \in X \times Z.$$

1.3. Tập mờ trực cảm

Tập mờ trực cảm được đề xuất bởi Krassimir Atanassov vào năm 1983 là một mở rộng của tập mờ Zadeh năm 1965. Nó đặc biệt hữu dụng khi làm việc với các đối tượng ngữ nghĩa tự nhiên, trong đó việc đưa ra độ thuộc không thôi chưa đủ. Ví dụ khi đưa ra quyết định một vấn đề, trong y khoa, bầu cử, kinh doanh... đặc biệt là khi tập hợp ý kiến nhiều chuyên gia, bên cạnh việc ủng hộ còn có sự phản đối và một tỉ lệ lưỡng lự nhất định. Tập mờ trực cảm là công cụ hiệu quả để biểu diễn và suy diễn các thông tin không chính xác, nhất quán.

1.3.1. Định nghĩa tập mờ trực cảm và một số phép toán cơ bản.

Tập mờ trực cảm là một dạng suy rộng của tập mờ. Bên cạnh hàm thuộc $\mu_A(x)$, Antanassov đã thêm vào khái niệm hàm không thuộc $\nu_A(x)$. Sau đây là định nghĩa tập mờ trực cảm (IFS).

Định nghĩa 1.32. [2] *Tập mờ trực cảm A trong không gian nền X có dạng:*

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \,|x \in X\}$$

trong đó: $\mu_A(x), \nu_A(x)$ lần lượt là độ thuộc và độ không thuộc của $x \in X$ đối với tập mờ A.
Với $\mu_A(x) \in [0,1]; \nu_A(x) \in [0,1]$ thỏa mãn $\mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1, \forall x \in X$.

Ví dụ 1.33.

Trong khi bầu lớp trưởng của lớp 8A trường THCS Nguyễn Trãi, các ứng viên A, B, C nhận được sự ủng hộ và không ủng hộ khác nhau, ta có thể biểu diễn tập kết quả phiếu bầu S như sau:

$$S = \{\langle A, 0.8, 0.1\rangle, \langle B, 0.6, 0.3\rangle, \langle C, 0.4, 0.3\rangle\}.$$

Khi đó S là một tập mờ trực cảm trên không gian nền tập các ứng viên

Ký hiệu: $IFS(X) = \{A|A\,\text{là tập mờ trực cảm trên nền}\,X\}$.
Ngoài ra với mỗi $A \in IFS(X)$

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x),\ \forall x \in X,$$

$\pi_A(x)$ được gọi là độ lưỡng lự của x vào A.

Dàn đầy đủ:

Xét tập L^* và phép toán $\leq_{L^*}$ định nghĩa bởi:

$$L^* = \left\{(x_1, x_2) \,|\, (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \text{ và } x_1 + x_2 \leq 1\right\}$$

$$(x_1, x_2) \leq_{L^*} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ và } x_2 \geq y_2,\ \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^*$$

Khi đó $(L^*, \leq_{L^*})$ là một dàn đầy đủ.
Kí hiệu các phần tử trung hòa là $0_{L^*} = (0, 1)$ và $1_{L^*} = (1, 0)$.
Ta thấy rằng với một tập mờ trực cảm A tương ứng với một tập mờ L^* như một ánh xạ

$$\begin{aligned} A: \quad & X \to L^* \\ & x \mapsto (\mu_A(x), \nu_A(x)) \end{aligned}$$

Sau đây là một số phép toán trên tập mờ trực cảm:

a) Tập con

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ và } \nu_A(x) \geq \nu_B(x).$$
$$A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

b) Hai tập bằng nhau

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ và } \nu_A(x) = \nu_B(x).$$

c) Phần bù

$$A^* = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x)\rangle \,|x \in X\}.$$

d) Phép giao

$$A \cap B = \{\langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x))\rangle \,|x \in X\}.$$

e) Phép hợp

$$A \cup B = \{\langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x))\rangle \,|x \in X\}.$$

f) Phép cộng

$$A + B = \{\langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) \cdot \nu_B(x)\rangle \,|x \in X\}.$$

g) Phép nhân

$$A \cdot B = \{\langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x) \cdot \nu_B(x)\rangle \,|x \in X\}.$$

Chương 2
Quan hệ mờ trực cảm và ứng dụng

2.1. Quan hệ mờ trực cảm và các phép toán

Định nghĩa 2.1. [4, 5] *Cho X, Y là các tập khác rỗng. Quan hệ mờ trực cảm R là một tập con mờ trực cảm của tập $X \times Y$ tức là R có dạng:*

$$R = \left\{ \left\langle (x,y), \mu_R(x,y), \nu_R(x,y) \right\rangle | (x,y) \in X \times Y \right\}.$$

Trong đó: $\mu_R : X \times Y \to [0,1]$, $\nu_R : X \times Y \to [0,1]$
thỏa mãn: $0 \le \mu_R(x,y) + \nu_R(x,y) \le 1, \forall (x,y) \in X \times Y$.

Kí hiệu: $IFR(X \times Y)$ là tập tất cả các quan hệ mờ trực cảm của $X \times Y$.

Định nghĩa 2.2. *Cho R là một quan hệ mờ trực cảm hai ngôi giữa X và Y. Ta định nghĩa quan hệ mờ trực cảm R^{-1} giữa Y và X bởi các hàm thuộc và hàm không thuộc:*

$$\mu_R^{-1}(y,x) = \mu_R(x,y)\,;\; \nu_R^{-1}(y,x) = \nu_R(x,y),\ \forall (x,y) \in X \times Y.$$

R^{-1} được gọi là quan hệ ngược của R.

Định nghĩa 2.3. *Cho R là một quan hệ mờ trực cảm hai ngôi giữa X và Y. Ta định nghĩa quan hệ bù trực cảm R_C giữa Y và X bởi*

$$R_C = \left\{ \left\langle (x,y), \nu_R(x,y), \mu_R(x,y) \right\rangle | (x,y) \in X \times Y \right\}.$$

Các tính chất suy trực tiếp từ tính chất của tập mờ trực cảm.

Định nghĩa 2.4. *Cho R và P là hai quan hệ mờ trực cảm giữa X và Y.*
a) $R \le P \Leftrightarrow \mu_R(x,y) \le \mu_P(x,y)$ và $\nu_R(x,y) \ge \nu_P(x,y),\ \forall (x,y) \in X \times Y$.
b) $R \preceq P \Leftrightarrow \mu_R(x,y) \le \mu_P(x,y)$ và $\nu_R(x,y) \le \nu_P(x,y),\ \forall (x,y) \in X \times Y$.
c) $R \vee P = \left\{ \left\langle (x,y), \mu_R(x,y) \vee \mu_P(x,y), \nu_R(x,y) \wedge \nu_P(x,y) \right\rangle | (x,y) \in X \times Y \right\}$.
d) $R \wedge P = \left\{ \left\langle (x,y), \mu_R(x,y) \wedge \mu_P(x,y), \nu_R(x,y) \vee \nu_P(x,y) \right\rangle | (x,y) \in X \times Y \right\}$.
e) $R_C = \left\{ \left\langle (x,y), \nu_R(x,y), \mu_R(x,y) \right\rangle | (x,y) \in X \times Y \right\}$.
Trong đó

$$\mu_R(x,y) \vee \mu_P(x,y) = \max\left(\mu_R(x,y), \mu_P(x,y)\right);$$
$$\nu_R(x,y) \wedge \nu_P(x,y) = \min\left(\nu_R(x,y), \nu_P(x,y)\right);$$
$$\mu_R(x,y) \wedge \mu_P(x,y) = \min\left(\mu_R(x,y), \mu_P(x,y)\right);$$
$$\nu_R(x,y) \vee \nu_P(x,y) = \max\left(\nu_R(x,y), \nu_P(x,y)\right).$$

Định lí 2.5. *Cho* $P, Q, R \in IFR(X \times Y)$ *khi đó:*
(i) $R \le P \Rightarrow R^{-1} \le P^{-1}$.
(ii) $(R \vee P)^{-1} = R^{-1} \vee P^{-1}$.
(iii) $(R \wedge P)^{-1} = R^{-1} \wedge P^{-1}$.
(iv) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.
(v) $R \wedge (P \vee Q) = (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$; $R \vee (P \wedge Q) = (R \vee P) \wedge (R \vee Q)$.
(vi) $R \vee P \ge R$; $R \vee P \ge P$; $R \wedge P \le P$; $R \wedge P \le P$.
(vii) $\left\{\begin{array}{l} R \ge P \\ R \ge Q \end{array}\right. \Rightarrow R \ge P \vee Q$; $\left\{\begin{array}{l} R \le P \\ R \le Q \end{array}\right. \Rightarrow R \le P \wedge Q$.

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa ta có thể chứng minh được các tính chất $(i), (ii), (iii), (iv), (vi)$.
(v)
Ta có:

$$\begin{aligned}\mu_{R\wedge(P\vee Q)}(x,y) &= \mu_R(x,y) \wedge \{\mu_P(x,y) \vee \mu_Q(x,y)\} \\ &= \{\mu_R(x,y) \wedge \mu_P(x,y)\} \vee \{\mu_R(x,y) \wedge \mu_Q(x,y)\} \\ &= \mu_{R\wedge P}(x,y) \vee \mu_{R\wedge Q}(x,y) = \mu_{(R\wedge P)\vee(R\wedge Q)}(x,y)\,.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được
$\nu_{R\wedge(P\vee Q)}(x,y) = \nu_{(R\wedge P)\vee(R\wedge Q)}(x,y)$.
Vậy $R \wedge (P \vee Q) = (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$.
Chứng minh tương tự với $R \vee (P \wedge Q) = (R \vee P) \wedge (R \vee Q)$.
(vii) Theo định nghĩa của $R \ge P$ và $R \ge Q$ ta có

$$\left\{\begin{array}{l} R \ge P \Rightarrow \mu_R(x,y) \ge \mu_p(x,y) \text{ và } \nu_R(x,y) \le \nu_P(x,y)\,, \\ R \ge Q \Rightarrow \mu_R(x,y) \ge \mu_Q(x,y) \text{ và } \nu_R(x,y) \le \nu_Q(x,y)\,. \end{array}\right.$$

Nếu $\mu_P(x,y) \ge \mu_Q(x,y)$ thì

$$\mu_P(x,y) \vee \mu_Q(x,y) = \mu_P(x,y) \le \mu_R(x,y).$$

Nếu $\mu_P(x,y) \le \mu_Q(x,y)$ thì

$$\mu_P(x,y) \vee \mu_Q(x,y) = \mu_Q(x,y) \le \mu_R(x,y)$$

$\Rightarrow \mu_P(x,y) \vee \mu_Q(x,y) \le \mu_R(x,y)$.
Vậy $\mu_{P\vee Q}(x,y) \le \mu_R(x,y)$.
Chứng minh tương tự ta được $\nu_{P\vee Q}(x,y) \ge \nu_R(x,y)$.
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R \ge P \\ R \ge Q \end{array}\right. \Rightarrow R \ge P \wedge Q$.

Chứng minh tương tự với $\left\{\begin{array}{l} R \le P \\ R \le Q \end{array}\right. \Rightarrow R \le P \wedge Q$. □

2.2. Phép hợp thành của quan hệ mờ trực cảm.

2.2.1. Suy rộng phép hợp thành max-min cho quan hệ mờ trực cảm.

Định nghĩa 2.6. *Cho $R \in IFR(X \times Y)$ và $P \in IFR(Y \times Z)$. Quan hệ hợp thành max – min PC_1R được xác định bởi*

$$PC_1R = \{\langle (x,z), \mu_{PC_1R}(x,z), \nu_{PC_1R}(x,z) \rangle \,|(x,z) \in X \times Z\}.$$

Trong đó

$$\mu_{PC_1R}(x,z) = \bigvee_y \{[\mu_R(x,y) \wedge \mu_P(y,z)]\},$$
$$\nu_{PC_1R}(x,z) = \bigwedge_y \{[\nu_R(x,y) \vee \nu_P(y,z)]\}.$$

với $\vee = \sup$*;* $\wedge = \inf$.

Mệnh đề 2.7.
Nếu $R \in IFR(X \times Y)$, $P \in IFR(Y \times Z)$ thì $PC_1R \in IFR(X \times Z)$.

Chứng minh. Đặt $K = \mu_{PC_1R}(x,z) + \nu_{PC_1R}(x,z)$. Ta cần chứng minh

$$0 \le K \le 1, \forall (x,z) \in X \times Z.$$

Ta có $\mu_{PC_1R}(x,z) = \bigvee_y \{[\mu_R(x,y) \wedge \mu_P(y,z)]\}$ suy ra tồn tại y^* sao cho

$$\mu_{PC_1R}(x,z) < \mu_R(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Ta lại có $\nu_{PC_1R}(x,z) = \bigwedge_y \{[\nu_R(x,y) \vee \nu_P(y,z)]\}$ suy ra

$$\nu_{PC_1R}(x,z) \le \nu_R(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z)$$
$$\Rightarrow K < \mu_R(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \nu_R(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) + \varepsilon. \qquad (2.1)$$

Ta xét hai trường hợp sau:

(i) Xét $\nu_R(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) = \nu_R(x,y^*)$.
Ta có $\mu_R(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) \le \mu_R(x,y^*)$ và do (2.1) suy ra

$$K \le \mu_R(x,y^*) + \nu_R(x,y^*) + \varepsilon \le 1 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$
$$\Rightarrow K \le 1, \forall (x,z) \in (X \times Z).$$

(ii) Xét $\nu_R(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) = \nu_P(y^*,z)$, chứng minh tương tự (i) ta có

$$K \le 1, \forall (x,z) \in (X \times Z).$$

Ta có $K \ge 0$ luôn đúng, vậy $0 \le K \le 1, \forall (x,z) \in X \times Z$. □

Định lí 2.8. *Trong điều kiện của định nghĩa 2.6 ta có*

(i) Nếu $P_1 \leq P_2$ *thì* $P_1C_1R \leq P_2C_1R$ *với mọi* $R \in IFR$.

(ii) Nếu $R_1 \leq R_2$ *thì* $PC_1R_1 \leq PC_1R_2$ *với mọi* $P \in IFR$.

(iii) Nếu $P_1 \preceq P_2$ *thì* $P_1C_1R \preceq P_2C_1R$ *với mọi* $R \in IFR$.

(iv) Nếu $R_1 \preceq R_2$ *thì* $PC_1R_1 \preceq PC_1R_2$ *với mọi* $P \in IFR$.

(v) Cho $R, P \in IFR\left(X \times X\right)$ *nếu* $P \leq R$ *thì* $PC_1P \leq RC_1R$.

Chứng minh.
(i) $P_1 \leq P_2 \Rightarrow \mu_{P_1}\left(y,z\right) \leq \mu_{P_2}\left(y,z\right)$ và $\nu_{P_1}\left(y,z\right) \geq \nu_{P_2}\left(y,z\right)$

$$\begin{aligned}\mu_{P_1C_1R}\left(x,z\right) &= \bigvee_y \left\{\left[\mu_R\left(x,y\right) \wedge \mu_{P_1}\left(y,z\right)\right]\right\} \leq \bigvee_y \left\{\left[\mu_R\left(x,y\right) \wedge \mu_{P_2}\left(y,z\right)\right]\right\} \\ &\leq \mu_{P_2C_1R}\left(x,z\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_{P_1C_1R}\left(x,z\right) &= \bigwedge_y \left\{\left[\nu_R\left(x,y\right) \vee \nu_{P_1}\left(y,z\right)\right]\right\} \geq \bigwedge_y \left\{\left[\nu_R\left(x,y\right) \vee \nu_{P_2}\left(y,z\right)\right]\right\} \\ &\geq \nu_{P_2C_1R}\left(x,z\right).\end{aligned}$$

$\Rightarrow P_1C_1R \leq P_2C_1R.$

Các ý $(ii), (iii), (iv)$ chứng minh tương tự.

(v)

$P \leq R$ theo ý (i) ta được:

$$PC_1P \leq RC_1P \tag{2.2}$$

$P \leq R$ theo ý (ii) ta được:

$$RC_1P \leq RC_1R \tag{2.3}$$

Từ (2.2),(2.3) suy ra $PC_1P \leq RC_1R$. □

2.2.2. Một số dạng hợp thành suy rộng khác.

Định nghĩa 2.9. *Cho* $R \in IFR\left(X \times Y\right)$ *và* $P \in IFR\left(Y \times Z\right)$. *Quan hệ hợp thành* max-*prod* PC_2R *được xác định bởi*

$$PC_2R = \left\{\left\langle \left(x,z\right), \mu_{PC_2R}\left(x,z\right), \nu_{PC_2R}\left(x,z\right)\right\rangle \left|\left(x,z\right) \in X \times Z\right.\right\}$$

Trong đó

$$\begin{aligned}\mu_{PC_2R}\left(x,z\right) &= \bigvee_y \left\{\left[\mu_R\left(x,y\right).\mu_P\left(y,z\right)\right]\right\} \\ \nu_{PC_2R}\left(x,z\right) &= \bigwedge_y \left\{\left[\nu_R\left(x,y\right) + \nu_P\left(y,z\right) - \nu_R\left(x,y\right).\nu_P\left(y,z\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

Mệnh đề 2.10.

Nếu $R \in IFR(X \times Y)$, $P \in IFR(Y \times Z)$ *thì* $PC_2R \in IFR(X \times Z)$.

Chứng minh. Ta cần chứng minh $\mu_{PC_2R}(x,z) + \nu_{PC_2R}(x,z) \leq 1$.

Ta có $\mu_{PC_2R}(x,z) = \bigvee_y \{[\mu_R(x,y).\mu_P(y,z)]\}$ suy ra tồn tại y^* sao cho

$$\mu_{PC_2R}(x,z) < \mu_R(x,y^*).\mu_P(y^*,z) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Ta lại có $\nu_{PC_2R}(x,z) = \bigwedge_y \{[\nu_R(x,y) + \nu_P(y,z) - \nu_R(x,y).\nu_P(y,z)]\}$

$\Rightarrow \nu_{PC_2R}(x,z) \leq \nu_R(x,y^*) + \nu_P(y^*,z) - \nu_R(x,y^*).\nu_P(y^*,z)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mu_{PC_2R}(x,z) + \nu_{PC_2R}(x,z) < \mu_R(x,y^*).\mu_P(y^*,z) + \nu_R(x,y^*)\\ + \nu_P(y^*,z) - \nu_R(x,y^*).\nu_P(y^*,z) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Đặt $\mu_R(x,y^*) = a,\ \nu_R(x,y^*) = b;\qquad \mu_P(y^*,z) = c,\ \nu_P(y^*,z) = d.$

Theo định nghĩa ta được

$$\begin{aligned}0 \leq a + b \leq 1 \Rightarrow a \leq 1 - b,\\ 0 \leq c + d \leq 1 \Rightarrow c \leq 1 - d.\end{aligned}$$

$\Rightarrow ac \leq (1-b)(1-d) = 1 - b - d + bd$

$\Rightarrow ac + b + d - bd \leq 1$.

$\Rightarrow \mu_{PC_2R}(x,z) + \nu_{PC_2R}(x,z) < 1 + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$

Vậy $\mu_{PC_2R}(x,z) + \nu_{PC_2R}(x,z) \leq 1$. □

Tương tự với β là t-chuẩn ta có thể xây dựng được các quan hệ mờ trực cảm sau:

Định nghĩa 2.11. *Cho* $R \in IFR(X \times Y)$ *và* $P \in IFR(Y \times Z)$, β *là một t-chuẩn. Quan hệ hợp thành* PC_3R *được xác định bởi*

$$PC_3R = \{\langle (x,z), \mu_{PC_3R}(x,z), \nu_{PC_3R}(x,z)\rangle \,|(x,z) \in X \times Z\}.$$

Trong đó

$$\begin{aligned}\mu_{PC_3R}(x,z) = \bigvee_y \{\beta[\mu_R(x,y), \mu_P(y,z)]\},\\ \nu_{PC_3R}(x,z) = \bigwedge_y \{[\nu_R(x,y) \vee \nu_P(y,z)]\}.\end{aligned}$$

với $\vee = \sup$*;* $\wedge = \inf$.

Định nghĩa 2.12. *Cho* $R \in IFR(X \times Y)$ *và* $P \in IFR(Y \times Z)$, β *là một t-chuẩn. Quan hệ hợp thành* PC_4R *được xác định bởi*

$$PC_4R = \{\langle (x,z), \mu_{PC_4R}(x,z), \nu_{PC_4R}(x,z)\rangle \,|(x,z) \in X \times Z\}.$$

Trong đó

$$\mu_{PC_4R}(x,z) = \bigwedge_y \{[\mu_R(x,y) \vee \mu_P(y,z)]\},$$
$$\nu_{PC_4R}(x,z) = \bigvee_y \{\beta[\nu_R(x,y), \nu_P(y,z)]\}.$$

với $\vee = \sup$; $\wedge = \inf$.

Các quan hệ $PC_3R \in IFR(X \times Z)$, $PC_4R \in IFR(X \times Z)$ được khẳng định dựa trên tính chất quan trọng sau của $t-$chuẩn:
nếu β là một $t-$chuẩn, thì $\beta(x,y) \leq min(x,y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Ví dụ 2.13. Quan hệ hợp thành max - min và max - prod.
Cho $X = \{x_1,\, x_2,\, x_3\}$; $Y = \{y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4\}$; $Z = \{z_1,\, z_2,\, z_3\}$.
E và P lần lượt là các quan hệ mờ trực cảm trên $X \times Y$ và $Y \times Z$ với ma trận giá trị của E và P tương ứng trong Bảng 2.1 và Bảng 2.2.

Bảng 2.1 Giá trị của E.

E	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	(0.7, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.2, 0.4)	(0.3, 0.5)
x_2	(0.3, 0.6)	(0.1, 0.5)	(0.7, 0.2)	(0.4, 0.6)
x_3	(0.8, 0.1)	(0.7, 0.3)	(0.4, 0.5)	(0.9, 0.1)

Bảng 2.2 Giá trị của P.

P	z_1	z_2	z_3
y_1	(0.1, 0.6)	(0.5, 0.2)	(0.7, 0.1)
y_2	(0.6, 0.2)	(0.7, 0.3)	(0.3, 0.4)
y_3	(0.4, 0.5)	(0.2, 0.8)	(0.3, 0.5)
y_4	(0.8, 0.2)	(0.9, 0.1)	(0.3, 0.7)

Khi đó kết quả của phép hợp thành EC_1P và EC_2P thu được trong Bảng 2.3 và Bảng 2.4

Bảng 2.3 Giá trị của quan hệ hợp thành EC_1P.

EC_1P	z_1	z_2	z_3
x_1	(0.6, 0.2)	(0.7, 0.2)	(0.7, 0.1)
x_2	(0.4, 0.5)	(0.4, 0.5)	(0.3, 0.5)
x_3	(0.8, 0.2)	(0.9, 0.1)	(0.7, 0.1)

Bảng 2.4 Giá trị của hợp thành EC_2P .

EC_2P	z_1	z_2	z_3
x_1	(0.54, 0.28)	(0.72, 0.37)	(0.49, 0.19)
x_2	(0.32, 0.6)	(0.36, 0.64)	(0.21, 0.6)
x_3	(0.72, 0.28)	(0.81, 0.19)	(0.56, 0.19)

2.3. Hợp thành của quan hệ mờ trực cảm trên một tập

Định nghĩa 2.14. [4, 5] *Ta gọi $R \in IFR\left(X \times X\right)$ là:*

1. Phản xạ nếu $\forall x \in X$, $\mu_R\left(x, x\right) = 1$. Từ đó ta có ngay với mọi $x \in X$, $\nu_R\left(x, x\right) = 0$.

2. Phản phản xạ nếu với mọi $x \in X$ thì $\mu_R\left(x, x\right) = 0, \nu_R\left(x, x\right) = 1$.

3. Đối xứng nếu $R = R^{-1}$, tức là với mọi $(x, y) \in X \times X$

$$\mu_R\left(x, y\right) = \mu_R\left(y, x\right), \nu_R\left(x, y\right) = \nu_R\left(y, x\right).$$

Trong trường hợp ngược lại ta gọi R là bất đối xứng.

4. Phản đối xứng trực cảm nếu với mọi $(x, y) \in X \times X, x \neq y$ thì

$$\begin{cases} \mu_R\left(x, y\right) \neq \mu_R\left(y, x\right), \\ \nu_R\left(x, y\right) \neq \nu_R\left(y, x\right), \\ \pi_R\left(x, y\right) = \pi_R\left(y, x\right). \end{cases}$$

5. Phản đối xứng trực cảm hoàn toàn nếu $\forall\left(x, y\right) \in X \times X, x \neq y$ và $\mu_R\left(x, y\right) > 0$ hoặc $\big(\mu_R\left(x, y\right) = 0 \text{ và} \nu_R\left(x, y\right) < 1\big)$ thì $\mu_R\left(y, x\right) = 0$ và $\nu_R\left(y, x\right) = 1$.

6. Bắc cầu nếu $R \geq RC_3R$.

7. C- bắc cầu nếu $R \leq RC_4R$.

Định lí 2.15. *Cho $R, P \in IFR\left(X \times X\right)$ thì $\left(RC_3P\right)_C = R_CC_4P_C$.*

Chứng minh. Theo định nghĩa với mọi $(x, z) \in X \times X$ thì

$$\mu_{R_C}(x, z) = \nu_R(x, z) \text{ và } \nu_{R_C}(x, z) = \mu_R(x, z),$$

$$\mu_{PC_3R}(x, z) = \bigvee_y \{\beta[\mu_R(x, y), \mu_P(y, z)]\},$$
$$\nu_{PC_3R}(x, z) = \bigwedge_y \{[\nu_R(x, y) \vee \nu_P(y, z)]\}.$$

$$\Rightarrow \mu_{(RC_3P)_C}(x, z) = \nu_{PC_3R}(x, z) = \bigwedge_y \{[\nu_R(x, y) \vee \nu_P(y, z)]\}$$
$$= \mu_{R_C C_4 P_C}(x, z), \forall (x, z) \in X \times X.$$

$$\nu_{(RC_3P)_C}(x, z) = \mu_{PC_3R}(x, z) = \bigvee_y \{\beta[\mu_P(x, y), \mu_R(y, z)]\}$$
$$= \nu_{R_C C_4 P_C}(x, z), \forall (x, z) \in X \times X.$$

Vậy $(RC_3P)_C = R_C C_4 P_C$. □

Định lí 2.16. *Cho $R \in IFR(X \times X)$*

i) R là phản xạ khi và chỉ khi R_C là phản phản xạ.

(ii) R là đối xứng khi và chỉ khi R_C là đối xứng.

(iii) R là phản đối xứng trực cảm khi và chỉ khi R_C là phản đối xứng trực cảm.

(iv) R là bắc cầu khi và chỉ khi R_C là C- bắc cầu.

Chứng minh.

$$R = \{\langle (x, y), \mu_R(x, y), \nu_R(x, y)\rangle \mid (x, y) \in X \times X\}.$$

$$R_C = \{\langle (x, y), \nu_R(x, y), \mu_R(x, y)\rangle \mid (x, y) \in X \times X\}.$$

(i) Ta có $\mu_{R_C}(x, y) = \nu_R(x, y)$; $\nu_{R_C}(x, y) = \mu_R(x, y)$ nên với mọi $x \in X$

$$\mu_R(x, x) = 1 \Leftrightarrow \nu_{R_C}(x, x) = 0,$$
$$\nu_R(x, x) = 0 \Leftrightarrow \mu_{R_C}(x, x) = 1.$$

Vậy R là phản xạ khi và chỉ khi R_C là phản phản xạ.

(ii) Theo định nghĩa $R = R^{-1}$ khi và chỉ khi với mọi $(x, y) \in X \times X$

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x); \nu_R(x, y) = \nu_R(y, x).$$

Vì $\mu_{R_C}(x, y) = \nu_R(x, y)$; $\nu_{R_C}(x, y) = \mu_R(x, y)$ nên $\forall (x, y) \in X \times X$

$$\mu_{R_C}(x, y) = \mu_{R_C}(y, x); \nu_{R_C}(x, y) = \nu_{R_C}(y, x).$$

Vậy R đối xứng khi và chỉ khi R_C đối xứng.

(iii)

Nếu R là phản đối xứng thì với mọi $(x, y) \in X \times X$ và $x \neq y$ thì

$$\begin{cases} \mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x), \\ \nu_R(x, y) \neq \nu_R(y, x), \\ \pi_R(x, y) = \pi_R(y, x). \end{cases}$$

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{cases} \pi_R(x, y) = 1 - (\mu_R(x, y) + \nu_R(x, y)), \\ \pi_R(y, x) = 1 - (\mu_R(y, x) + \nu_R(y, x)). \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu_R(x, y) + \nu_R(x, y) = \mu_R(y, x) + \nu_R(y, x)$.

Ta lại có $\mu_{R_C}(x, y) = \nu_R(x, y)$, $\nu_{R_C}(x, y) = \mu_R(x, y)$ nên

$$\begin{cases} \mu_{R_C}(x, y) \neq \mu_{R_C}(y, x), \\ \nu_{R_C}(x, y) \neq \nu_{R_C}(y, x), \\ \mu_{R_C}(x, y) + \nu_{R_C}(x, y) = \mu_{R_C}(y, x) + \nu_{R_C}(y, x). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{R_C}(x, y) \neq \mu_{R_C}(y, x), \\ \nu_{R_C}(x, y) \neq \nu_{R_C}(y, x), \\ \pi_{R_C}(x, y) = \pi_{R_C}(y, x). \end{cases}$$

Vậy R_C là phản đối xứng.

Nếu R_C là phản đối xứng thì chứng minh tương tự ta được R là phản đối xứng.

(iv)

Nếu R là bắc cầu thì $R \geq RC_3R$ khi và chỉ khi $\forall (x, y) \in X \times X$

$$\begin{cases} \mu_R(x, y) \geq \mu_{RC_3R}(x, y), \\ \nu_R(x, y) \leq \nu_{RC_3R}(x, y), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_R(x, y) \geq \bigvee\limits_z \{\beta[\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)]\}, \\ \nu_R(x, y) \leq \bigwedge\limits_y \{[\nu_R(x, z) \vee \nu_P(z, y)]\}. \end{cases}$$

Mà $\mu_{R_C}(x, y) = \nu_R(x, y)$, $\nu_{R_C}(x, y) = \mu_R(x, y)$, $\forall (x, y) \in X \times X$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \nu_{R_C}(x, y) \geq \bigvee\limits_z \{\beta[\nu_{R_C}(x, z), \nu_{R_C}(z, y)]\}, \\ \mu_{R_C}(x, y) \leq \bigwedge\limits_y \{[\mu_{R_C}(x, z) \vee \mu_{R_C}(z, y)]\}. \end{cases}$$

$\Rightarrow R_C \leq R_C C_4 R_C$.

Vậy R_C là $C-$ bắc cầu.

Nếu R_C là $C-$bắc cầu thì chứng minh tương tự ta được R là bắc cầu. $\square$

Định lí 2.17. *Cho R_1 là quan hệ phản xạ mờ trực cảm trên $X \times X$. Thì:*
(i) $(R_1)^{-1}$ là phản xạ.
(ii) $R_1 \vee R_2$ là phản xạ với mọi $R_2 \in IFR(X \times X)$.
(iii) $R_1 \wedge R_2$ là phản xạ nếu và chỉ nếu $R_2 \in IFR(X \times X)$ là phản xạ.

Chứng minh.
(i) R_1 là phản xạ thì với mọi $x \in X$ ta có

$$\mu_{R_1}(x,x) = 1 \Rightarrow \mu_{(R_1)^{-1}}(x,x) = \mu_{R_1}(x,x) = 1.$$

Vậy $(R_1)^{-1}$ là phản xạ.
(ii)
Theo định nghĩa $R_1 \vee R_2$ ta có với mọi $(x,y) \in X \times X$

$$\begin{aligned}\mu_{R_1 \vee R_2}(x,y) &= \mu_{R_1}(x,y) \vee \mu_{R_2}(x,y), \\ \nu_{R_1 \vee R_2}(x,y) &= \nu_{R_1}(x,y) \wedge \nu_{R_2}(x,y).\end{aligned}$$

Mà R_1 là phản xạ nên với mọi $x \in X$ thì $\mu_{R_1}(x,x) = 1$.
$\Rightarrow \mu_{R_1 \vee R_2}(x,x) = \mu_{R_1}(x,x) \vee \mu_{R_2}(x,x) = 1 \vee \mu_{R_2}(x,x) = 1.$
Vậy $R_1 \vee R_2$ là phản xạ.
(iii)
Theo định nghĩa của $R_1 \wedge R_2$ ta có với mọi $(x,y) \in X \times X$

$$\begin{aligned}\mu_{R_1 \wedge R_2}(x,y) &= \mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(x,y), \\ \nu_{R_1 \wedge R_2}(x,y) &= \nu_{R_1}(x,y) \vee \nu_{R_2}(x,y).\end{aligned}$$

Mà R_1 là phản xạ nên với mọi $x \in X$ thì

$$\mu_{R_1 \wedge R_2}(x,x) = \mu_{R_1}(x,x) \wedge \mu_{R_2}(x,x) = 1 \wedge \mu_{R_2}(x,x) = \mu_{R_2}(x,x).$$

Vậy $R_1 \wedge R_2$ phản xạ $\Leftrightarrow$ R_2 là phản xạ. □

Định lí 2.18. *Mọi tập mờ trực cảm R có tính phản xạ và bắc cầu đều thỏa mãn*
$(i) R = RC_1R$.
$(ii) R = R^k$ với mọi $k = 1, 2, \dots$ trong đó $R^k = RC_1RC_1 \dots C_1R$ gồm k lần tập R.

Chứng minh.
(i) Vì R bắc cầu nên

$$RC_1R \leq R. \tag{2.4}$$

Ta cần chứng minh $R \leq RC_1R$.
Vì R là phản xạ nên với mọi $x \in X$ thì $\mu_R(x,x) = 1$; $\nu_R(x,x) = 0$ suy ra

$$\mu_{RC_1R}(x,z) = \bigvee_y \{\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{y\neq x} \{\mu_R(x,x) \wedge \mu_R(x,z), \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\} \\
&= \bigvee_{y\neq x} \{1 \wedge \mu_R(x,z), \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\} \\
&= \bigvee_{y\neq x} \{\mu_R(x,z), \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\} \geq \mu_R(x,z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu_{RC_1R}(x,z) &= \bigwedge_{y} \{\nu_R(x,y) \vee \nu_R(y,z)\} \\
&= \bigwedge_{y\neq x} \{\nu_R(x,x) \vee \nu_R(x,z), \nu_R(x,y) \vee \nu_R(y,z)\} \\
&= \bigwedge_{y\neq x} \{0 \vee \nu_R(x,z), \nu_R(x,y) \vee \nu_R(y,z)\} \\
&= \bigwedge_{y\neq x} \{\nu_R(x,z), \nu_R(x,y) \vee \nu_R(y,z)\} \leq \nu_R(x,z).
\end{aligned}
$$

Vậy

$$R \leq RC_1R \tag{2.5}$$

Từ (2.4), (2.5) suy ra $R = RC_1R$ (đpcm).
(ii) Với $k = 3$
Vì R là bắc cầu nên $RC_1R \leq R$
Theo Định lý 2.8 ta có $RC_1RC_1R \leq RC_1R = R$ (theo (i)).
Từ (i) ta có $R \leq RC_1R$.
Theo Định lý 2.8 ta có $RC_1R \leq RC_1RC_1R \Rightarrow R \leq RC_1RC_1R$.
Vậy $R = RC_1RC_1R = R^3$.
Chứng minh tương tự với các giá trị k khác. □

2.4. Ứng dụng

Ngày nay, tập mờ trực cảm được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như các bài toán hỗ trợ quyết định (Decision Making Problems), hỗ trợ chẩn đoán y khoa (Supporting Medical Diagnosis), dự báo (chỉ số chứng khoán, ...), phân cụm dữ liệu mờ (Clustering fuzzy data),...

Phần này trình bày một ứng dụng của tập mờ trực cảm dựa trên phương pháp tiếp cận của Sanchez [12, 13] cho chuẩn đoán y khoa do nhóm tác giả S.K.De, R. Biswas, A.R. Roy trình bày trong [14].

Giả sử rằng:

S: là tập các triệu chứng.

D : là tập các chẩn đoán bệnh.

P : là tập các bệnh nhân.

Tương tự như khái niệm của Sanchez về “Tri thức Y Khoa”, người ta định nghĩa “Tri thức Y Khoa trực cảm” như là một quan hệ mờ trực cảm

R xác định trên tích trực tiếp tập triệu chứng S với tập chẩn đoán bệnh D (hay trên $S \times D$). Từ đó ta sẽ thấy được sự liên quan, độ thuộc và độ không thuộc giữa các triệu chứng và các chẩn đoán bệnh.

Phương pháp chẩn đoán theo ba bước sau:

1. Xác định các triệu chứng được các bác sỹ hoặc các máy móc y khoa đưa ra.

2. Biểu diễn cơ sở tri thức y khoa bằng quan hệ mờ trực cảm được các chuyên gia y khoa học các thiết bị y khoa đưa ra.

3. Xác định các chẩn đoán dựa trên phép hợp thành của các quan hệ mờ trực cảm.

Bài toán đưa ra:

Có n bệnh nhân $p_i, i = 1, 2, .., n; p_i \in P$. $R \in IFR(S \times D)$, quan hệ mờ trực cảm Q từ tập bệnh nhân P đến tập các triệu chứng S $(Q \in IFR(P \times S))$.

Rõ ràng kết quả phép hợp thành của hai quan hệ R và Q là một quan hệ mờ trực cảm $T = R \circ Q : P \to D$ cho biết sự liên quan giữa người bệnh với các chẩn đoán bệnh, được xác định bởi hàm thuộc:

$$\mu_T(p_i, d_k) = \vee[\mu_Q(p_i, s) \wedge \mu_R(s, d_k)],$$

và hàm không thuộc:

$$\nu_T(p_i, d_k) = \wedge[\nu_Q(p_i, s) \vee \nu_R(s, d_k)], \forall p_i \in P, d_k \in D.$$

Khi cho R và Q thì quan hệ $T = R \circ Q$ tính được. Từ những hiểu biết của Q và T, một phiên bản cải thiện của quan hệ trực cảm T cho ra kết quả đúng tốt nhất là:

(i) $S_T = \mu_T - \nu_T \cdot \pi_T$ là lớn nhất,

(ii) Quan hệ $T = R \circ Q$ được bảo toàn .

Với $\pi_T(u)$ là độ lưỡng lự của giá trị u đối với tập U, $\pi_T = 1 - (\mu_T + \nu_T)$.

Phiên bản cải thiện này của T làm quan hệ mờ trực cảm có ý nghĩa hơn, quan hệ của các triệu chứng đối với các chẩn đoán bệnh sẽ có độ thuộc cao hơn và độ không thuộc thấp hơn, cũng như độ lưỡng lự thấp hơn đó chính là một bước tiếp cận đến "Kiến thức y khoa trực cảm".

Nếu chẩn đoán của các bệnh khác nhau lại có giá trị bằng nhau trong T, ta sẽ xem xét trường hợp nào có độ lưỡng lự nhỏ nhất.

Từ phiên bản thô của R, người ta có thể suy luận các triệu chứng chẩn đoán bệnh trong cặp giá trị - độ thuộc và độ không thuộc. Trong trường hợp, bác sĩ không thỏa mãn với kết quả, R sẽ được sửa đổi.

Ví dụ minh họa

Cho tập P gồm 4 bệnh nhân: Paul, Jadu, Kundu và Rohit và tập S gồm các triệu chứng: sốt, đau đầu, đau dạ dày, ho, đau ngực. Khi đó

$P = \{$Paul, Jadu, Kundu, Rohit$\}$,

$S = \{$sốt, đau đầu, đau dạ dày, ho, đau ngực$\}$.

Gọi tập các chẩn đoán bệnh là

$D = \{$sốt virus, sốt rét, thương hàn, vấn đề dạ dày, vấn đề tim (VĐ tim)$\}$.

Các số liệu đầu vào được cho trong các Bảng 2.5, Bảng 2.6.

Bảng 2.5 Q là một quan hệ mờ trực cảm giữa tập P và S.

Q	Nhiệt độ	Đau đầu	Đau dạ dày	Ho	Đau ngực
Paul	(0.8, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.2, 0.8)	(0.6, 0.1)	(0.1, 0.6)
Jadu	(0, 0.8)	(0.4, 0.4)	(0.6, 0.1)	(0.1, 0.7)	(0.1, 0.8)
Kundu	(0.8, 0.1)	(0.8, 0.1)	(0, 0.6)	(0.2, 0.7)	(0, 0.5)
Rohit	(0.6, 0.1)	(0.5, 0.4)	(0.3, 0.4)	(0.7, 0.2)	(0.3, 0.4)

Bảng 2.6 R là một quan hệ mờ trực cảm giữa tập S và D.

R	Sốt Virut	Sốt rét	Thương hàn	Dạ dày	VĐ tim
Nhiệt độ	(0.4, 0)	(0.7, 0)	(0.3, 0.3)	(0.1, 0.7)	(0.1, 0.8)
Đau dầu	(0.3, 0.5)	(0.2, 0.6)	(0.6, 0.1)	(0.3, 0.4)	(0, 0.8)
Đau dạ dày	(0.1, 0.7)	(0, 0.9)	(0.2, 0.7)	(0.8, 0)	(0.2, 0.8)
Ho	(0.4, 0.3)	(0.7, 0)	(0.2, 0.6)	(0.2, 0.7)	(0.2, 0.8)
Đau ngực	(0.1, 0.7)	(0.1, 0.8)	(0.1, 0.9)	(0.2, 0.7)	(0.8, 0.1)

Khi đó kết quả của phép hợp thành $T = R \circ Q$ và S_T thu được trong Bảng 2.7 và Bảng 2.8

Bảng 2.7 T là một quan hệ mờ trực cảm giữa tập P và D.

T	Sốt Virut	Sốt rét	Thương hàn	Dạ dày	VĐ tim
Paul	(0.4, 0.1)	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.2, 0.4)	(0.2, 0.6)
Jadu	(0.3, 0.5)	(0.2, 0.6)	(0.4, 0.4)	(0.6, 0.1)	(0.1, 0.7)
Kundu	(0.4, 0.1)	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.2, 0.4)	(0.2, 0.5)
Rohit	(0.4, 0.1)	(0.7, 0.1)	(0.5, 0.3)	(0.3, 0.4)	(0.3, 0.4)

Bảng 2.8 S_T.

S_T	Sốt virut	Sốt rét	Thương hàn	Dạ dày	VĐ tim
Paul	0.35	0.68	0.57	0.04	0.08
Jadu	0.20	-0.08	0.32	0.57	-0.04
Kundu	0.35	0.68	0.57	0.04	-0.05
Rohit	0.32	0.68	0.44	0.18	0.18

Dựa vào kết quả của Bảng 2.8 bác sĩ có thể chuẩn đoán Paul, Kundu, và Rohit bị bệnh Sốt rét còn Jadu bị đau dạ dầy.

Chương 3
Tập mờ bức tranh và ứng dụng

Gần đây, Bùi Công Cường và Vladik Kreinovich định nghĩa tập mờ bức tranh như một mở rộng của tập mờ và tập mờ trực cảm [6, 7, 8]. Quan hệ mờ bức tranh cũng được định nghĩa và là một trong những khái niệm đầu tiên khi xây dựng lý thuyết tập mờ bức tranh. Trong phần này, một số tính chất của phép hợp thành quan hệ mờ bức tranh được kiểm tra. Sau đó, chúng tôi đề xuất một cách tiếp cận mới trong chẩn đoán y khoa sử dụng phép hợp thành quan hệ mờ bức tranh. Đây cũng là nội dung bài báo của chúng tôi đã được đăng trong kỷ yếu của *Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VII về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công Nghệ thông tin (FAIR)* tháng 6 năm 2014.

3.1. Tập mờ bức tranh

3.1.1. Định nghĩa và một số phép toán của tập mờ bức tranh

Định nghĩa 3.1. [6, 7] *Một tập mờ bức tranh A trên không gian nền X là một tập được xác định bởi*

$$A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x), \nu_A(x)) \,|x \in X\}$$

trong đó $\mu_A(x) \in [0,1]$, $\eta_A(x) \in [0,1]$, $\nu_A(x) \in [0,1]$ lần lượt được gọi là độ thuộc, độ trung lập, độ không thuộc của x vào A và các hàm μ_A, η_A và ν_A thỏa mãn điều kiện

$$0 \le \mu_A(x) + \eta_A(x) + \nu_A(x) \le 1,\ \forall x \in X.$$

Khi đó, với mọi $x \in X$, $\pi_A(x) = 1 - [\mu_A(x) + \eta_A(x) + \nu_A(x)]$ được gọi là độ từ chối xác nhận của x trong A.

Kí hiệu $PFS(X)$ là tập tất cả các tập mờ bức tranh trong không gian nền X.

Về cơ bản, tập mờ bức tranh được thể hiện đầy đủ trong các tình huống khi con người tham gia các cuộc bầu cử lấy ý kiến trả lời: có, lưỡng lự, không,không trả lời.

Định nghĩa 3.2. [6, 7] *Cho A, B là hai phần tử của $PFSs$.*
a) Phép hợp $A \cup B$ được xác định bởi các hàm tương ứng sau:

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\cup B}(x) = \max\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_B\left(x\right)\right\},\\
&\eta_{A\cup B}(x) = \min\left\{\eta_A\left(x\right), \eta_B\left(x\right)\right\},\\
&\nu_{A\cup B}(x) = \min\left\{\nu_A\left(x\right), \nu_B\left(x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

b) Phép giao $A \cap B$ được xác định bởi các hàm tương ứng sau:

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\cap B}(x) = \min\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_B\left(x\right)\right\},\\
&\eta_{A\cap B}(x) = \min\left\{\eta_A\left(x\right), \eta_B\left(x\right)\right\},\\
&\nu_{A\cap B}(x) = \max\left\{\nu_A\left(x\right), \nu_B\left(x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

c) Phần bù:

$$CoA = A^C = \left\{\left(x, \nu_A\left(x\right), \eta_A\left(x\right), \mu_A\left(x\right)\right)|x \in X\right\}.$$

3.1.2. Quan hệ mờ bức tranh

Định nghĩa 3.3. [7, 8] *Một quan hệ mờ bức tranh R là một tập mờ bức tranh của $X \times Y$ được xác định bởi*

$$R = \left\{\left((x,y), \mu_R\left(x,y\right), \eta_R\left(x,y\right), \nu_R\left(x,y\right)\right)|(x,y) \in X \times Y\right\}.$$

Trong đó $\mu_R : X\times Y \to [0,1]$, $\eta_R : X\times Y \to [0,1]$, $\nu_R : X\times Y \to [0,1]$ thỏa mãn điều kiện
$0 \leq \mu_A\left(x,y\right) + \eta_A\left(x,y\right) + \nu_A\left(x,y\right) \leq 1, \forall (x,y) \in X \times Y.$

Ta kí hiệu: $PFR(X \times Y)$ là tập tất cả các quan hệ mờ bức tranh trên $X \times Y$.

Định nghĩa 3.4. [7, 8] *Cho X, Y, Z là các tập khác rỗng.*
$E \in PFR(X\times Y)$ *và* $P \in PFR(Y \times Z)$. *Quan hệ hợp thành* $\max - \min$ $P\mathbb{C}_1E$ *được xác định bởi*

$$P\mathbb{C}_1E = \left\{\left((x,z), \mu_{P\mathbb{C}_1E}\left(x,z\right), \eta_{P\mathbb{C}_1E}\left(x,z\right), \nu_{P\mathbb{C}_1E}\left(x,z\right)\right)|x \in X,\ z \in Z\right\}.$$

Trong đó

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) = \bigvee_y\{[\mu_E(x,y) \wedge \mu_P(y,z)]\},\\
&\eta_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) = \bigwedge_y\{[\eta_E(x,y) \wedge \eta_P(y,z)]\},\\
&\nu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) = \bigwedge_y\{[\nu_E(x,y) \vee \nu_P(y,z)]\},
\end{aligned}\right. \qquad \forall (x,z) \in X \times Z.$$

Mệnh đề 3.5. [11]
Nếu $E \in PFR(X \times Y)$ *và* $P \in PFR(Y \times Z)$ *thì* $P\mathbb{C}_1 E \in PFR(X \times Z)$.

Chứng minh. Với mọi $(x, z) \in X \times Z$, ta phải chứng minh:

$$\mu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) \leq 1.$$

Theo định nghĩa ta có
Với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại một $y^* \in Y$ sao cho:

$$\mu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) < \mu_E(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \varepsilon \tag{3.1}$$

$$\eta_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) \leq \eta_E(x,y^*) \wedge \eta_P(y^*,z) \tag{3.2}$$

$$\nu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) \leq \nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) \tag{3.3}$$

Từ (3.1), (3.2) và (3.3) ta có:

$$\begin{aligned}\mu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) &< \mu_E(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) \\ &+ \eta_E(x,y^*) \wedge \eta_P(y^*,z) + \nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ta có hai trường hợp sau:
Trường hợp 1: $\nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) = \nu_E(x,y^*)$ thì

$$\begin{aligned}&\mu_E(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \eta_E(x,y^*) \wedge \eta_P(y^*,z) + \nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) + \varepsilon \\ &= \mu_E(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \eta_E(x,y^*) \wedge \eta_P(y^*,z) + \nu_E(x,y^*) + \varepsilon \\ &\leq \mu_E(x,y^*) + \eta_E(x,y^*) + \nu_E(x,y^*) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) = \nu_P(y^*,z)$ thì

$$\begin{aligned}&\mu_E(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \eta_E(x,y^*) \wedge \eta_P(y^*,z) + \nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) + \varepsilon \\ &= \mu_E(x,y^*) \wedge \mu_P(y^*,z) + \eta_E(x,y^*) \wedge \eta_P(y^*,z) + \nu_P(y^*,z) + \varepsilon \\ &\leq \mu_P(y^*,z) + \eta_P(y^*,z) + \nu_P(y^*,z) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Vậy

$$\mu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) < 1 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Hay với mọi $(x, z) \in X \times Z$ ta có

$$\mu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_1E}(x,z) \leq 1.$$

□

Định nghĩa 3.6. [7, 8] *Cho $E \in PFR(X \times Y)$ và $P \in PFR(Y \times Z)$. Quan hệ hợp thành* $\max -$*prod* $P\mathbb{C}_2E$ *được xác định bởi*

$$P\mathbb{C}_2E = \{((x,z), \mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z), \eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z), \nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z)) | (x,z) \in X \times Z\}.$$

Trong đó

$$\begin{aligned}
&\mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) = \bigvee_y \{\mu_E(x,y) \cdot \mu_P(y,z)\},\\
&\eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) = \bigwedge_y \{\eta_E(x,y) \cdot \eta_P(y,z)\},\\
&\nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) = \bigwedge_y \{\nu_E(x,y) + \nu_P(y,z) - \nu_E(x,y) \cdot \nu_P(y,z)\}.
\end{aligned}$$

Mệnh đề 3.7. [11]

Nếu $E \in PFR(X \times Y)$ và $P \in PFR(Y \times Z)$ thì $P\mathbb{C}_2E \in PFR(X \times Z)$.

Chứng minh. Với mọi $(x,z) \in X \times Z$, ta phải chứng minh:

$$\mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) \leq 1.$$

Theo định nghĩa ta có

Với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại một $y^* \in Y$ sao cho:

$$\mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) < \mu_E(x,y^*) \cdot \mu_P(y^*,z) + \varepsilon \tag{3.4}$$

$$\eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) \leq \eta_E(x,y^*) \cdot \eta_P(y^*,z) \tag{3.5}$$

$$\nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) \leq \nu_E(x,y^*) + \nu_P(y^*,z) - \nu_E(x,y^*) \cdot \nu_P(y^*,z) \tag{3.6}$$

Từ (3.4), (3.5) và (3.6) ta có

$$\begin{aligned}
&\mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) < \mu_E(x,y^*) \cdot \mu_P(y^*,z)\\
&+ \eta_E(x,y^*) \cdot \eta_P(y^*,z) + [\nu_E(x,y^*) + \nu_P(y^*,z) - \nu_P(y^*,z) \cdot \nu_E(x,y^*)] + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Bởi định nghĩa của PFR,

$$\begin{aligned}
&\mu_E(x,y^*) + \eta_E(x,y^*) \leq 1 - \nu_E(x,y^*),\\
&\mu_P(y^*,z) + \eta_P(y^*,z) \leq 1 - \nu_P(y^*,z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow [\mu_E(x,y^*) + \eta_E(x,y^*)] \cdot [\mu_P(y^*,z) + \eta_P(y^*,z)]&\\
\leq [1 - \nu_E(x,y^*)][1 - \nu_P(y^*,z)]&.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu_E(x,y^*) \cdot \mu_P(y^*,z) + \eta_E(x,y^*) \cdot \eta_P(y^*,z)&\\
+ [\nu_E(x,y^*) + \nu_P(y^*,z) - \nu_E(x,y^*) \cdot \nu_P(y^*,z)]&\\
\leq 1 - \mu_E(x,y^*) \cdot \eta_P(y^*,z) + \eta_E(x,y^*) \cdot \mu_P(y^*,z) \leq 1&.
\end{aligned}$$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$ thì

$$\mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) < 1 + \varepsilon.$$

Hay

$$\mu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_2E}(x,z) \le 1.$$

□

Định nghĩa sau là một quan hệ tổng quát hơn sử dụng hai $t-$ chuẩn.

Định nghĩa 3.8. [11] *Cho $E \in PFR(X \times Y)$, $P \in PFR(Y \times Z)$ và β_1, β_2 là hai $t-$chuẩn. Quan hệ hợp thành $P\mathbb{C}_3E$ được xác định bởi*

$$P\mathbb{C}_3E = \left\{\left((x,z), \mu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z), \eta_{P\mathbb{C}_3E}(x,z), \nu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z)\right) | x \in X,\ z \in Z\right\}.$$

Trong đó

$$\begin{aligned}
\mu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) &= \bigvee_y \{\beta_1[\mu_E(x,y), \mu_P(y,z)]\},\\
\eta_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) &= \bigwedge_y \{\beta_2[\eta_E(x,y), \eta_P(y,z)]\},\\
\nu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) &= \bigwedge_y \{\nu_E(x,y) \vee \nu_P(y,z)\}.
\end{aligned}$$

Sự xác nhận của $P\mathbb{C}_3E$ là sử dụng tính chất quan trọng sau của $t-$chuẩn. Nếu β là một $t-$chuẩn, thì $\beta(x,y) \le min(x,y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Mệnh đề 3.9. [11]

Nếu $E \in PFR(X \times Y)$ và $P \in PFR(Y \times Z)$ thì $P\mathbb{C}_3E \in PFR(X \times Z)$.

Chứng minh. Với mọi $(x,z) \in X \times Z$, ta phải chứng minh:

$$\mu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) \le 1.$$

Theo định nghĩa ta có

Với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại một $y^* \in Y$ sao cho:

$$\mu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) < \beta_1[\mu_E(x,y^*), \mu_P(y^*,z)] + \varepsilon \tag{3.7}$$

$$\eta_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) \le \beta_2[\eta_E(x,y^*), \eta_P(y^*,z)] \tag{3.8}$$

$$\nu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) \le \nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) \tag{3.9}$$

Từ (3.7), (3.8) và (3.9) ta có

$$\begin{aligned}
\mu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) + \eta_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) + \nu_{P\mathbb{C}_3E}(x,z) &< \beta_1[\mu_E(x,y^*), \mu_P(y^*,z)]\\
&+ \beta_2[\eta_E(x,y^*), \eta_P(y^*,z)] + \nu_E(x,y^*) \vee \nu_P(y^*,z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\nu_E(x, y^*) \vee \nu_P(y^*, z) = \nu_E(x, y^*)$ thì

$$\begin{aligned}
&\beta_1[\mu_E(x, y^*), \mu_P(y^*, z)] + \beta_2[\eta_E(x, y^*), \eta_P(y^*, z)] \\
&\qquad\qquad + \nu_E(x, y^*) \vee \nu_P(y^*, z) + \varepsilon \\
&\quad = \beta_1[\mu_E(x, y^*), \mu_P(y^*, z)] + \beta_2[\eta_E(x, y^*), \eta_P(y^*, z)] + \nu_E(x, y^*) + \varepsilon \\
&\qquad\qquad \le \mu_E(x, y^*) + \eta_E(x, y^*) + \nu_E(x, y^*) + \varepsilon \le 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\nu_E(x, y^*) \vee \nu_P(y^*, z) = \nu_P(y^*, z)$ thì

$$\begin{aligned}
&\beta_1[\mu_E(x, y^*), \mu_P(y^*, z)] + \beta_2[\eta_E(x, y^*), \eta_P(y^*, z)] \\
&\qquad\qquad + \nu_E(x, y^*) \vee \nu_P(y^*, z) + \varepsilon \\
&\quad = \beta_1[\mu_E(x, y^*), \mu_P(y^*, z)] + \beta_2[\eta_E(x, y^*), \eta_P(y^*, z)] + \nu_P(y^*, z) + \varepsilon \\
&\qquad\qquad \le \mu_P(y^*, z) + \eta_P(y^*, z) + \nu_P(y^*, z) + \varepsilon \le 1 + \varepsilon
\end{aligned}$$

Vậy

$$\mu_{P\mathbb{C}_3E}(x, z) + \eta_{P\mathbb{C}_3E}(x, z) + \nu_{P\mathbb{C}_3E}(x, z\langle 1 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Hay

$$\mu_{P\mathbb{C}_3E}(x, z) + \eta_{P\mathbb{C}_3E}(x, z) + \nu_{P\mathbb{C}_3E}(x, z) \le 1.$$

□

Ví dụ 3.10. Cho:$X = \{x_1, x_2, x_3\}$,$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $X = \{z_1, z_2, z_3\}$, $E \in PFR(X \times Y)$ và $P \in PFR(X \times Y)$ có giá trị được cho bởi những Bảng 3.1, Bảng 3.2.

Cho $T_\chi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ là một $t-$chuẩn được định nghĩa bởi

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x + y \le 1, \\ x + y - 1 & \text{nếu} \quad x + y > 1, \end{cases} \forall (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Thì hợp thành $P\mathbb{C}_3E$ trong đó: $\beta_1 = T_\chi$, $\beta_2 = \wedge$ được cho bởi Bảng 3.3.

Bảng 3.1 E là một quan hệ mờ bức tranh giữa X và Y.

E	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	(0.7, 0.2, 0.1)	(0.1, 0.05, 0.6)	(0.02, 0.6, 0.2)	(0.07, 0. 3, 0.4)
x_2	(0.5, 0.4, 0.01)	(0.8, 0.03, 0.05)	(0.2, 0.25, 0.5)	(0.7, 0.15, 0.08)
x_3	(0.3, 0.5, 0.15)	(0.9, 0.05, 0.01)	(0.45, 0.5, 0.01)	(0.1, 0.1, 0.4)

Bảng 3.2 P là một quan hệ mờ bức tranh giữa Y và Z.

P	z_1	z_2	z_3
y_1	(0.75, 0.1, 0.15)	(0.5, 0.25, 0.01)	(0.45, 0.4, 0.01)
y_2	(0.2, 0.4, 0.3)	(0.36, 0.6, 0.05)	(0.2, 0.2, 0.6)
y_3	(0.06, 0.24, 0.4)	(0.55, 0.09, 0.3)	(0.7, 0.1, 0.1)
y_4	(0.3, 0.04, 0.6)	(0.4, 0.3, 0.25)	(0.4, 0.2, 0.1)

Bảng 3.3 $P\mathbb{C}_3E$ là một quan hệ mờ bức tranh với $\beta_1 = T_\chi$, $\beta_2 = \wedge$.

$P\mathbb{C}_3E$	z_1	z_2	z_3
x_1	(0.45, 0.04, 0.15)	(0.2, 0.05, 0.1)	(0.15, 0.05, 0.1)
x_2	(0.25, 0.3, 0.15)	(0.15, 0.03, 0.01)	(0.1, 0.03, 0.01)
x_3	(0.1, 0.04, 0.15)	(0.25, 0.05, 0.05)	(0.15, 0.05, 0.1)

3.2. Ứng dụng

Trong phần này chúng tôi đưa ra một ứng dụng của quan hệ mờ bức tranh dựa trên cách tiếp cận của Sanchez [12, 13] để chẩn đoán y khoa. Trong ứng dụng này, S là tập các triệu chứng, D là tập các chuẩn đoán y khoa, và P là tập các bênh nhân.

Ta định nghĩa " Tri thức Y khoa bức tranh" như là một quan hệ mờ bức tranh R giữa tập triệu chứng S với tập chẩn đoán bệnh D qua đó thấy được sự kết hợp của các độ thuộc, độ không thuộc và độ trung lập giữa triệu chứng và các chuẩn đoán bệnh.

Bây giờ ta sẽ mô tả các chuẩn đoán mờ bức tranh. Như một sự tương tự phương pháp truyền thống cũ phương pháp chẩn đoán mờ bức tranh theo 3 bước sau:

1. Xác định các triệu chứng.
2. Biểu diễn cơ sở tri thức y khoa bằng quan hệ mờ bức tranh.
3. Xác định các chẩn đoán dựa trên phép hợp thành của các quan hệ mờ bức tranh.

Cho $Q \in PFR(P \times S)$ và $R \in PFR(S \times D)$, rõ ràng quan hệ hợp thành T của R và Q ($T = R \circ Q$) biểu thị "Tình trạng" của bệnh nhân đối với chuẩn đoán bệnh. Chẳng hạn, tình trạng bệnh nhân có thể được xác định như quan hệ hợp thành max - min T từ P vào D:

$$\begin{aligned}
\mu_T(p,d) &= \bigvee_{s\in S}\{\mu_Q(p,s)\wedge\mu_R(s,d)\},\\
\eta_T(p,d) &= \bigwedge_{s\in S}\{\eta_Q(p,s)\wedge\eta_R(s,d)\},\\
\nu_T(p,d) &= \bigwedge_{s\in S}\{\nu_Q(p,s)\vee\nu_R(s,d)\},\ \forall p\in P, d\in D.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.11. Ta hãy xét bốn bệnh nhân p_1, p_2, p_3, và p_4. Các triệu chứng: nhiệt độ (NĐộ), đau dạ dầy (Đ.D.Dày), đau đầu (ĐĐầu), ho, và đau ngực (ĐNgực). Do đó:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ là tập bệnh nhân.

$S =\{$ Nhiệt độ, Đau đầu, Ho, Đau ngực, Đau dạ dày$\}$ là tập triệu chứng. Khi đó quan hệ mờ bức tranh $Q \in PFR(P\times S)$ được cho bởi Bảng 3.4. Cho tập các chuẩn đoán bệnh là:
$D = \{$Sốt Viral, sốt rét, thương hàn, vấn đề dạ dày, vấn đề tim (VĐ tim)$\}$. Khi đó quan hệ mờ bức tranh $R \in PFS(S\times D)$ được cho bởi Bảng 3.5. Quan hệ $T = R\circ Q$ thu được cho trong Bảng 3.6.

Mối liên hệ giữa bệnh nhân p và bệnh d được thể hiện tương ứng qua ba thông số $\mu_T(p,d)$, $\eta_T(p,d)$, $\nu_T(p,d)$. Với mỗi $(p,d)\in P\times D$, chúng ta xác định $S_T(p,d)$ tương ứng như sau:

$$S_T(p,d) = \mu_T(p,d) - \nu_T(p,d)\,\pi_T(p,d).$$

trong đó $\pi_T(p,d) = 1 - [\mu_T(p,d) + \eta_T(p,d) + \nu_T(p,d)]$.
Ta thấy nếu $\mu_T(p,d) + \eta_T(p,d) + \nu_T(p,d) = 1$ thì $S_T(p,d) = \mu_T(p,d)$. Nếu $S_T(p,d) \geq 0.5$ thì bệnh nhân p được kết luận là bị bênh d .

Do đó dựa vào Bảng 3.7 bác sĩ có thể kết luận được bệnh nhân p_1, p_3, và p_4 bị bệnh sốt rét, p_1, p_3 bị bệnh thương hàn và bệnh nhân p_2 có vấn đề về dạ dày.

Bảng 3.4 Q là một quan hệ mờ bức tranh giữa P và S.

Q	Nhiệt độ	Đau đầu	Đau dạ dày	Ho	Đau ngực
p_1	(0.8, 0.03, 0.1)	(0.7, 0.05, 0.2)	(0.1, 0.2, 0.6)	(0.7, 0.15, 0.1)	(0.2, 0.3, 0.5)
p_2	(0.01, 0.2, 0.7)	(0.5, 0.05, 0.3)	(0.65, 0.1, 0.1)	(0.05, 0.2, 0.7)	(0.07, 0.2, 0.6)
p_3	(0.75, 0.15, 0.05)	(0.8, 0.1, 0.08)	(0.15, 0.35, 0.5)	(0.3, 0.05, 0.6)	(0.1, 0.4, 0.5)
p_4	(0.6, 0.25, 0.1)	(0.4, 0.15, 0.4)	(0.2, 0.4, 0.3)	(0.6, 0.2, 0.15)	(0.35, 0.2, 0.2)

Bảng 3.5 R là một quan hệ mờ bức tranh giữa tập S và D.

R	Sốt Viral	Sốt rét	Thương hàn	Dạ dày	VĐ tim
NĐộ	(0.4, 0.4, 0.05)	(0.8, 0.1, 0.1)	(0.3, 0.3, 0.3)	(0.15, 0.05, 0.6)	(0.05, 0.15, 0.7)
ĐĐầu	(0.4, 0.25, 0.3)	(0.1, 0.2, 0.6)	(0.75, 0.05, 0.03)	(0.3, 0.05, 0.05)	(0.01, 0.1, 0.8)
DDày	(0.1, 0.25, 0.6)	(0.01, 0.03, 0.9)	(0.1, 0.2, 0.7)	(0.8, 0.1, 0.01)	(0.1, 0.15, 0.75)
Ho	(0.45, 0.2, 0.1)	(0.65, 0.5, 0.05)	(0.2, 0.15, 0.6)	(0.25, 0.25, 0.5)	(0.15, 0.2, 0.7)
ĐNgực	(0.05, 0.25, 0.6)	(0.03, 0.07, 0.8)	(0.01, 0.01, 0.85)	(0.1, 0.1, 0.7)	(0.9, 0.02, 0.05)

Bảng 3.6 T là một quan hệ mờ bức tranh giữa tập P và D.

T	Sốt Viral	Sốt rét	Thương hàn	Dạ dày	VĐ tim
p_1	(0.45, 0.03, 0.1)	(0.8, 0.03, 0.1)	(0.7, 0.01, 0.2)	(0.3, 0.03, 0.2)	(0.2, 0.02, 0.5)
p_2	(0.4, 0.05, 0.3)	(0.1, 0.03, 0.6)	(0.5, 0.01, 0.3)	(0.65, 0.05, 0.1)	(0.1, 0.02, 0.5)
p_3	(0.4, 0.05, 0.05)	(0.75, 0.03, 0.1)	(0.75, 0.01, 0.08)	(0.3, 0.05, 0.08)	(0.15, 0.02, 0.5)
p_4	(0.45, 0.15, 0.1)	(0.6, 0.03, 0.1)	(0.4, 0.01, 0.3)	(0.3, 0.05, 0.3)	(0.35, 0.02, 0.2)

Bảng 3.7 S_T.

S_T	Sốt Viral	Sốt rét	Thương hàn	Dạ dày	VĐ tim
p_1	0.408	0.793	0.682	0.206	0.06
p_2	0.325	-0.062	0.443	0.63	-0.09
p_3	0.375	0.738	0.7372	0.2544	-0.015
p_4	0.42	0.573	0.313	0.195	0.264

Kết luận

Luận văn đã trình bày về quan hệ mờ trực cảm, ứng dụng của quan hệ mờ trực cảm trong chuẩn đoán y khoa và mở rộng chúng sang quan hệ mờ bức tranh. Các kết quả chính được trình bày trong luận văn bao gồm:

(i) Trình bày về tập mờ và tập mờ trực cảm bao gồm: các khái niệm, lôgic mờ, quan hệ mờ và các phép toán của chúng.

(ii) Trình bày cụ thể về quan hệ mờ trực cảm. Trình bày các khái niệm, các phép toán đặc biệt là phép hợp thành mờ trực cảm. Xây dựng một số phép hợp thành cụ thể. Trình bày một ứng dụng của quan hệ mờ trực cảm trong chuẩn đoán y khoa.

(iii) Mở rộng quan hệ mờ trực cảm sang quan hệ mờ bức tranh. Xây dựng một số phép hợp thành cụ thể của quan hệ mờ bức tranh. Đề xuất một ứng dụng của quan hệ mờ bức tranh được mở rộng.

Những đóng góp của chúng tôi trong luận văn đó là đã hệ thống, sắp xếp và trình bày lại các kiến thức, kết quả của quan hệ mờ trực cảm. Các chứng minh định lý, mệnh đề được trình bày lại và giải thích rõ ràng. Đặc biệt là các Định lý 1.25, Mệnh đề 2.7, Mệnh đề 2.10, Mệnh đề 3.5, Mệnh đề 3.7, Mệnh đề 3.9 được chúng tôi tự chứng minh. Đồng thời chúng tôi còn xây dựng các ví dụ để minh họa cho các khái niệm và các kết quả trong luận văn. Đặc biệt chúng tôi đã mở rộng quan hệ mờ trực cảm sang quan hệ mờ bức tranh, đề xuất một ứng dụng của nó và đã được trình bày và đăng trong kỷ yếu của *Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VII về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công Nghệ thông tin (FAIR)* tháng 6 năm 2014.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng chắc chắn trong luận văn còn nhiều khiếm khuyết, sai sót, tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn. Trân trọng cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

[1] Bùi Công Cường, Nguyễn Doãn Phước (Chủ biên) (2006), *Hệ mờ, mạng nơron và ứng dụng - Xuất bản lần 2*, Nhà xuất bản Khoa học Kĩ thuật, Hà Nội.

[2] Krassimir T. Atanassov (1986), "Intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems, vol.20*, pp. 87-96, .

[3] Atanassov, K.T., Stoeva, S. (1984), "Intuitionistic L - fuzzy sets", *Cybernetics and Systems Research*, 2, 539 - 540.

[4] P. Burillo, and H. Bustince (1995), "Intuitionistic fuzzy relations (Part I)", *Mathware Soft Computing, vol. 2*, pp. 25-38.

[5] H. Bustince, and P. Burillo (1996), "Structures on intuitionistic fuzzy relations", *Fuzzy Sets and Systems, vol. 78*, 293-303.

[6] B. C. Cuong (2013), "Picture fuzzy sets – first results. Part 1", *In Preprint of Seminar on Neuro-Fuzzy Systems with Applications, Institute of Mathematics*, Hanoi.

[7] B. C. Cuong (2013), "Picture fuzzy sets – first results. Part 2", *In Preprint of Seminar on Neuro-Fuzzy Systems with Applications, Institute of Mathematics*, Hanoi.

[8] B. C. Cuong, V. Kreinovich (2013), "Picture Fuzzy Sets- a new concept for computational intelligence problems", *In Proceedings of the Third World Congress on Information and Communication Technologies WIICT 2013*, pp. 1- 6.

[9] Bui Cong Cuong, Pham Hong Phong (2014), "New Composition of Intuitionistic Fuzzy Relations", *Knowledge and Systems Engineering Advances in Intelligent Systems and Computing Volume*, (244), pp 123-136.

[10] Glad Deschrijver, Chris Cornelis, and Etienne E. Kerre (2004), "On the Representation of intuitionistic Fuzzy $t-$ Norms and $t-$

Conom", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.12*, no. I, February .

[11] P. H. Phong, Đ. T. Hieu, R. H. Ngan, P. T. Them (2014), "Some compositions of picture fuzzy relations", *Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VII về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công Nghệ thông tin (FAIR)*, Thai Nguyen.

[12] E. Sanchez (1976), "Resolution of composition fuzzy relation equations", *Information and Control, vol.30*, pp. 38-48.

[13] E. Sanchez (1977), "Solutions in composite fuzzy relation equation. Application to Medical diagnosis in Brouwerian Logic", *Fuzzy Automata and Decision Process, Elsevier, North-Holland*, pp. 221 - 234.

[14] K. D. Supriya, B. Ranjit , R. R. Akhil (2001), "An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis", *Fuzzy Sets and Systems, vol.117*, 209-213.

[15] L. A. Zadeh (1965),"Fuzzy Sets", *Information and Control, vol. 8*, 338-353.